



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

Механико-математический факультет

**КОНФЕРЕНЦИЯ
молодых ученых**

*Труды XXVIII Конференции молодых ученых
механико-математического факультета МГУ
(9–21 апреля 2006 г.)*

Москва 2006 год

УДК 51 + 53

ББК 22.1 + 22.2

Конференция молодых ученых.

**Труды XXVIII Конференции молодых ученых
механико-математического факультета МГУ
(9–21 апреля 2006 г.)**

В настоящем сборнике представлены статьи по актуальным проблемам математики и механики, подготовленные участниками XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (19–22 апреля 2006 г.), проведённой совместно с XIII Международной научной конференцией студентов, аспирантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ».

Традиционная конференция, проводившаяся на мехмате МГУ деканом, Советом молодых ученых и Студенческим советом факультета, собрала около сотни студентов, аспирантов, молодых преподавателей и научных сотрудников из различных университетов и научных центров России, а также Беларуси, Украины и Казахстана. Статьи публикуются в том виде, как они были представлены в оргкомитет авторами.

**Proceedings of the XXVIII Conference of Young Scientists,
Department of Mechanics and Mathematics,
Moscow State University
(April 9–21, 2006)**

© Механико-математический факультет МГУ, 2006

Оглавление

В. А. Борисов. Задача наискорейшего объезда заданной последовательности точек плоскости	7
Я. А. Бутко. Поверхностные меры Смолянова для уравнения Шрёдингера на компактном римановом многообразии	10
И. В. Гердт. \mathfrak{A} -Малые абелевы группы	15
Д. С. Глызин. Периодические решения системы трех связанных нелинейных телеграфных уравнений	18
С. А. Горшкова. Об асимптотике собственного значения для оператора Лапласа в многомерной области с малым отверстием	22
Я. С. Гриншпон. Счетная паракомпактность топологий раздельной непрерывности на произведении ординалов	26
Д. Б. Давлетов. О сходимости собственных элементов возмущенной краевой задачи Дирихле для системы дифференциальных уравнений Ламэ	31
О. Ю. Данилкина. Смешанная нелокальная задача для параболического уравнения	35
П. В. Деев, И. Ю. Воронина, С. В. Князева, Е. С. Фирсанов. Моделирование напряженного состояния обделок тоннелей, сооружаемых закрытым способом	39
А. В. Домбровская. Анализ выживания популяции частиц для критического ветвящегося случайного блуждания на \mathbb{Z}^d	43
О. С. Дудакова. Семейства предполных классов монотонных функций в P_k , не имеющих конечного базиса	47
Ю. Ю. Евсеева. О количестве представлений чисел неодноклассными бинарными квадратичными формами	51
К. Н. Егоров, А. И. Тимофеев. Применение анализа чувствительности в теории запасов	53
Т. В. Елисева. Смешанная краевая задача для уравнения Лапласа в кусочно-однородной области	57
С. В. Здобнова. Функция вида $u(t) = U(t)x + (U * f)(t)$ как решение абстрактной задачи Коши с генератором полугруппы класса $(1, A)$ или K -конволюционной полугруппы.	61
Н. А. Земцов. Мониторинг вычислительных процессов	66
Н. В. Карапетян, Д. А. Ярцева. Асимптотическое поведение времени поглощения	71
В. Э. Ким. Интерполяционная задача в пространствах целых периодических функций	75

В. В. Китов. Построение оптимальной инвестиционной стратегии при наличии фиксированных и пропорциональных издержек . . .	79
В. В. Колыбасова. Двумерное уравнение Гельмгольца с заданием условий Дирихле и третьего рода на разрезах	83
А. С. Крамарский. Вероятностная модель неоднородных по времени параллельных вычислений	86
В. В. Красильщиков, А. В. Шутов. О распределении последовательности по переменному модулю	90
Н. Ю. Крыжановская. Статистический вариант ЦПТ для векторных слабо зависимых полей	93
П. Н. Кузнецов. Операторы дифференцирования и интегрирования в линейном пространстве	97
Е. В. Кучунова. Вычислительный алгоритм для расчета упругих волн в блочной среде на многопроцессорных вычислительных системах	100
А. С. Ледков. Изучение вращательного движения сегментально-конического аппарата при спуске в атмосфере	104
В. М. Лозинский, М. И. Кумсков, С. Ю. Сергунин. Представление пространственных объектов облаком особых точек в задаче распознавания	111
А. Г. Малышкин. Стохастическая многочастичная синхронизация на малых временах	114
М. Ю. Медведик. Использование субиерархических параллельных вычислительных алгоритмов для решения электромагнитных задач дифракции на плоских экранах	118
С. В. Милютин. Численная стабилизация уравнения Чафе-Инфанта с помощью граничных условий	124
М. В. Мосягина. Асимптотическая нормальность взвешенных сумм зависимых случайных векторов	128
М. М. Мусин. Закон повторного логарифма для последовательности объемов случайных множеств	132
Нгуен Ван Лой. О числе доминирования одного класса графов . .	135
А. Ю. Неклюдов. Обращение теоремы Чернова	141
П. Н. Нестеров. Асимптотическое интегрирование системы двух линейных осцилляторов с медленно убывающей связью	143
О. С. Ощепкова. О выпуклости гиперпространств над банаховым пространством в семействе обобщенных метрик Помпею	148
Л. А. Петров. Асимптотические свойства синхронизованного набора частиц на прямой	152
А. С. Пляшечник. Конечно-кратные интегралы, аппроксимирующие в пространстве S решение интегро-дифференциального уравнения	156

М. А. Прибыль. Секториальность оператора линеаризованных стационарных уравнений вязкой сжимаемой жидкости	158
Ю. Л. Притыкин. Конечно-автоматные преобразования почти периодических последовательностей и алгоритмическая неразрешимость	162
М. А. Раскин. Об оценке регулятора автоматного образа строго почти периодической последовательности	166
И. А. Родионова. О фредгольмовости электромагнитной задачи о собственных колебаниях в экранированных слоях, связанных через отверстие в экране	170
А. В. Романов. Допустимые правила конструктивной теории полей и некоторых ее расширений	173
Ю. В. Саватеев. Несеквенциональное исчисление Ламбека с одним делением.	176
Е. О. Салобутина. Режимы учащающихся переключений в задаче оптимального управления колебаниями n осцилляторов	180
А. В. Сильниченко. О свойствах систем представлений	184
А. Г. Славин. Гидродинамика невязкой тяжелой жидкости со свободной поверхностью над подстилающей поверхностью сложного профиля	188
В. Р. Тагирова. Аналитическое и численное исследование автомодельного распространения трещины гидроразрыва	192
И. В. Телятников. Представление решений задачи Коши для уравнения теплопроводности на римановых многообразиях с переменным коэффициентом диффузии	197
Б. В. Фалейчик. Обобщение процесса Пикара и варианты его численной реализации	201
И. В. Федорова. К вычислению LBB константы для треугольной области	207
О. Д. Фролкина. Минимизация количества классов Нильсена в задаче прообраза	212
В. М. Харьков. Об асимптотике решений одного класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка	216
Э. А. Хорошева. Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в цилиндрических диэлектрических волноводах, заполненных нелинейной средой	218
А. А. Цупак. Исследование трехмерных задач дифракции электромагнитных волн на объемных диэлектрических телах методом сингулярных интегральных уравнений	223
А. А. Чернышов. Особенности метода крупных вихрей в магнито-гидродинамике сжимаемой жидкости	227
И. Шапировский. О свойствах некоторых транзитивных логик с универсальной модальностью	233

Т. А. Шатров. Бесконечная аксиоматизируемость информационных логик на открытых множествах	236
А. С. Шмелева. Зависимости между корнями и коэффициентами многочленов	241
А. Д. Яшунский. О булевых базисах с постоянной функцией вероятности	243

Доказательство. Пусть $a \in A$, $c \in \partial V_{h_2 d_{AB}}(A)$ Пусть $[c, a]$ пересекает $\partial V_{h_2 d_{AB}}(A)$ в точке $a_\lambda = \lambda c + (1 - \lambda)a$ и $\rho(c, A) = d$, а $\rho(c, a) = (1 + \varepsilon)d$. Оценим расстояние $\rho(c, a_\lambda)$. Расстояние $\rho(a_\lambda, A) = h_1 d_{AB} = f$. Тогда из равенства $a_\lambda = \lambda c + (1 - \lambda)a$ по Лемме 3 следует, что $\rho(a_\lambda, A) \leq \lambda \rho(c, A) + (1 - \lambda)\rho(c, A) = (1 - \lambda)d$. Откуда $\lambda \leq \frac{d-f}{d}$, $1 - \lambda \geq \frac{f}{d}$. Рассмотрим расстояние $\rho(a, a_\lambda) = (1 - \lambda)\rho(c, a) \geq \frac{f}{d}(1 + \varepsilon)d = f(1 + \varepsilon)$. Тогда $\rho(c, a_\lambda) = \rho(c, a) - \rho(a, a_\lambda) \leq d(1 + \varepsilon) - f(1 + \varepsilon) = (d - f)(1 + \varepsilon)$. Поэтому $\frac{\rho(c, a_\lambda)}{\rho(c, a)} < \frac{d-f}{d}$. Так как $d \leq d_{BA}$, тогда $\frac{f}{d} \geq \frac{f}{d_{BA}}$ следовательно $1 - \frac{f}{d} \leq 1 - \frac{f}{d_{BA}}$, то есть $\frac{\rho(c, a_\lambda)}{\rho(b, a)} \leq \frac{d-f}{d} \leq \frac{d_{BA}-f}{d_{BA}}$. Из равенства $a_\lambda = \lambda c + (1 - \lambda)a$ используя Лемму 3 следует, что $\rho(a, c) \leq \lambda \rho(c, C_{h_2}) + (1 - \lambda)\rho(a, C_{h_2}) = (1 - \lambda)\rho(a, C_{h_2}) \leq f = h d_{AB}$. Поэтому точка a_λ принадлежит C_{h_2} . Получили, что пересечение отрезка $[c, a]$ и множества $\partial V_{h_1 d_{AB}}(A)$ содержится в $V_{(1-h_1)d_{BA}}(B)$. Поэтому $d(c, C_{h_1}) = d(c, V_{h_1 d_{AB}}(A))$, а значит $d(B, C_{h_1}) = d(C_{h_2}, V_{h_1 d_{AB}}(A))$. Поэтому $dist_\alpha(C_{h_1}, C_{h_2}) = (h_2 - h_1)dist_\alpha(A, B)$. \square .

[1] АСЕЕВ В. В., ТЕТЕНОВ А. В., МАКСИМОВА А. П. «Обобщенная метрика Помпею в проблеме изометрии гиперпространств.»// Мат. Заметки, т. 78, № 2, 2005, стр. 163–170

[2] R. DUDA “On convex metric spaces III”// Fund. Math., 51(1962) pp. 23–33.

УДК 519.217

Асимптотические свойства синхронизованного набора частиц на прямой

Л. А. Петров

Московский государственный университет

1. Описание модели. На прямой находится $n \geq 2$ частиц с заданным начальным распределением (n фиксировано). В каждый момент времени $t = 0, 1, \dots$ самая левая из частиц мгновенно перемещается на случайное расстояние $\xi(t)$ вправо (и после этого скачка на $\xi(t)$ наступает момент $t + 1$). Считаем скачки $(\xi(0), \xi(1), \dots)$ неотрицательными независимыми одинаково распределенными случайными величинами, не зависящими от начального расположения частиц. Исследуются свойства этой системы частиц при $t \rightarrow \infty$.

Данная постановка задачи возникла при анализе модели синхронизации времени, описанной в [3].

2. Основные результаты. Пусть частицы пронумерованы, обозначим их координаты $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Упорядочим эти числа, получим порядковые статистики $X_{(1)}(t) \leq \dots \leq X_{(n)}(t)$. Положим $Y_j = X_{(j)} - X_{(1)}$, $\vec{Y} = (Y_2, \dots, Y_n)$. Тогда случайные векторы $\{\vec{Y}(t)\}_{t=0,1,\dots}$ образуют марковскую цепь, согласованную с естественной фильтрацией последовательности $(\vec{Y}(0), \xi(0), \xi(1), \dots)$.

Пусть величина ξ распределена так же, как $\xi(0)$. Если $E\xi < \infty$, то существует предельная скорость движения для каждой из частиц, равная $(E\xi)/n$ то есть для $k = 1, \dots, n$ $X_k(t)/t \xrightarrow{P} (E\xi)/n$ при $t \rightarrow \infty$.

Также отдельно рассмотрены частные случаи, когда $n = 2$ или 3 и распределение ξ показательное. В этих предположениях доказано существование стационарного распределения цепи $\{\vec{Y}(t)\}_{t=0,1,\dots}$, найдено это распределение, и при $n = 2$ сделана оценка скорости сходимости к нему. Выдвинута гипотеза о виде стационарного распределения в экспоненциальном случае при $n = 4, 5, \dots$

3. Марковское свойство. Для доказательства марковости векторов $\{\vec{Y}(t)\}_{t=0,1,\dots}$ выведем закон изменения $\vec{Y}(t)$ при переходе от момента времени t в момент $t + 1$.

Положим $S_{(k)} = \sum_{i=k}^n X_{(i)}$ и найдем $\Delta S_{(k)}(t) = S_{(k)}(t+1) - S_{(k)}(t)$. Рассмотрим два случая. Если $\xi(t) \leq Y_k(t) = X_{(k)}(t) - X_{(1)}(t)$, то левая частица не допрыгивает до k -й по порядку, и значение $S_{(k)}$ не изменяется. Если же $\xi(t) > Y_k(t)$, то частицы меняют свой порядок, и значение $S_{(k)}$ увеличивается ровно настолько, насколько левая частица перепрыгнула k -ю, то есть на $\xi(t) - Y_k(t)$. Окончательно имеем

$$\Delta S_{(k)}(t) = (\xi(t) - X_{(k)}(t))I_{\{\xi(t) > Y_k(t)\}} = (\xi(t) - Y_k(t))^+, \quad (1)$$

где $\eta^+ = \max\{\eta, 0\}$. Далее, так как $X_{(k)} = S_{(k)} - S_{(k+1)}$ (полагаем для удобства $S_{(n+1)} \equiv 0$), то $\Delta X_{(k)}(t) = (\xi(t) - Y_k(t))^+ - (\xi(t) - Y_{k+1}(t))^+$ для $k < n$, и $\Delta Y_n(t) = (\xi(t) - Y_n(t))^+$. Тогда легко видеть, что $\Delta X_{(1)}(t) = \xi(t) - (\xi(t) - Y_2(t))^+ = \min\{\xi(t), Y_2(t)\}$. ■

Отсюда получаем формулы изменения компонент вектора $\vec{Y}(t)$:

$$\Delta Y_k(t) = (\xi(t) - Y_k(t))^+ - (\xi(t) - Y_{k+1}(t))^+ - \xi(t) \wedge Y_2(t), \quad k = 2, \dots, n-1; \quad (2)$$

$$\Delta Y_n(t) = (\xi(t) - Y_n(t))^+ - \xi(t) \wedge Y_2(t).$$

Из этих формул сразу следует

Утверждение 1 (марковское свойство). Последовательность векторов $\{\vec{Y}(t)\}_{t=0,1,\dots}$ образуют марковскую цепь с дискретным временем и пространством состояний R_+^{n-1} , согласованную с естественной фильтрацией случайной последовательности $(\vec{Y}(0), \xi(0), \xi(1), \dots)$.

4. Центр масс и диаметр системы. Опишем движение центра масс $X_c = (X_1 + \dots + X_n)/n$. Обозначим $S(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$. Тогда понятно, что $S(t+1) - S(t) = \xi(t)$. Запишем

$$\frac{S(t)}{t} = \frac{1}{t}(S(t) - S(t-1) + \dots + S(0)) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \xi(i) + \frac{S(0)}{t}. \quad (3)$$

Так как $E\xi < \infty$ и $S(0)/t \xrightarrow{P} 0$ при $t \rightarrow \infty$ (потому что распределение $S(0)$ задано и не зависит от t), то по ЗБЧ $S(t)/t \xrightarrow{P} E\xi$, $t \rightarrow \infty$. Значит, для центра масс существует предельная скорость, то есть $X_c(t)/t \xrightarrow{P} E\xi/n$, $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим движение диаметра системы $Y_n \equiv D = X_{(n)} - X_{(1)}$.

Утверждение 2. Если $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$, то существует предельная скорость для каждой из частиц, равная $E\xi/n$.

Доказательство. Фиксируем k от 1 до n . Если $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$, то для любого $j \neq k$ выполнено $(X_k(t) - X_j(t))/t \xrightarrow{P} 0$, $t \rightarrow \infty$. Теперь сложим эти $n-1$ соотношений с $(X_1(t) + \dots + X_n(t))/t \xrightarrow{P} E\xi$, и получим $X_k(t)/t \xrightarrow{P} E\xi/n$, $t \rightarrow \infty$, что и требовалось.

5. Оценка с помощью максимумов. Докажем, что из существования $E\xi < \infty$ следует сходимость $D(t)$ к нулю. Введем максимумы $M(t) = \max\{\xi(0), \xi(1), \dots, \xi(t-1)\}$.

Лемма. Для $t = 0, 1, \dots$ выполнено $D(t) \leq \max\{D(0), M(t)\}$. Если $M(t)/t \xrightarrow{P} 0$, то $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$, $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Запишем формулы преобразования (2):

$$D(t+1) = D(t) + (\xi(t) - D(t))^+ - \xi(t) \wedge Y_2(t).$$

Понятно, что всегда $Y_2(t) \leq D(t)$. Рассмотрим два случая.

1) Если $\xi(t) \leq D(t)$, то $D(t+1) = D(t) - \xi(t) \wedge Y_2(t) \leq D(t)$.

2) Если $\xi(t) > D(t)$, то $D(t+1) = \xi(t) - Y_2(t) \leq \xi(t)$.

Таким образом, $D(t+1) \leq \max\{D(t), \xi(t)\}$, и первое утверждение леммы следует отсюда по индукции. Так как $D(0)$ — заданное распределение, не зависящее от t , то $D(0)/t \xrightarrow{P} 0$, $t \rightarrow \infty$. Значит, для стремления $D(t)/t \xrightarrow{P} 0$ достаточно, чтобы $M(t)/t \xrightarrow{P} 0$, $t \rightarrow \infty$.

6. Существование предельной скорости. Докажем импликацию $E\xi < \infty \Rightarrow M(t)/t \xrightarrow{P} 0$, $t \rightarrow \infty$. Понятно, что

$$M(t)/t \xrightarrow{P} 0, t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(M(t) \leq \varepsilon t) \rightarrow 1, t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Пусть $F(x)$ — функция распределения величины ξ , $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. Нам понадобится теорема:

Теорема 1 [1, стр. 23]. Пусть $0 \leq \tau \leq \infty$. Для последовательности $\{u_t\}$ выполнение $P(M(t) \leq u_t) \rightarrow e^{-\tau}$ равносильно $t\bar{F}(t) \rightarrow \tau$, $t \rightarrow \infty$.

Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$, возьмем $u_t = \varepsilon t$ и докажем $t\bar{F}(\varepsilon t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Для этого достаточно показать, что $x\bar{F}(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$, потому что тогда для $\forall \varepsilon > 0$ $\varepsilon t\bar{F}(\varepsilon t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Воспользуемся утверждением:

Утверждение 3 [2, стр. 266]. Пусть $\xi \geq 0$, $E\xi < \infty$. Тогда

$$E\xi = \int_0^{\infty} P(\xi > x) dx = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx. \quad (5)$$

Возьмем $x > 0$. Запишем: $\int_0^x \bar{F}(y) dy = x\bar{F}(x) + \int_0^x y dF(y)$ (проинтегрировали по частям). При $x \rightarrow \infty$ оба интеграла стремятся к $E\xi$, поэтому $x\bar{F}(x) \rightarrow 0$.

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть $E\xi < \infty$. Тогда существует предельная скорость частиц X_1, \dots, X_n , равная $E\xi/n$, то есть $X_k(t)/t \xrightarrow{P} E\xi/n$, $t \rightarrow \infty$.

7. Частные случаи. Пусть $n = 2$ и величина скачка ξ распределена показательно с параметром λ , $E\xi = 1/\lambda$. Ясно, что

$$\Delta(X_1(t) - X_2(t)) = \xi(t)I_{\{X_1(t) < X_2(t)\}} - \xi(t)I_{\{X_1(t) \geq X_2(t)\}},$$

где $\Delta(X_1(t) - X_2(t)) = (X_1(t+1) - X_2(t+1)) - (X_1(t) - X_2(t))$. Тогда $E[\Delta(X_1(t) - X_2(t)) | X_1(t) - X_2(t) = z] = (I_{z < 0} - I_{z \geq 0})E\xi$. Значит, «в среднем» величина $(X_1(t) - X_2(t))$ «стремится» вернуться в 0, и по критерию Фостера [4] марковская цепь $\{X_1(t) - X_2(t)\}$ эргодична, то есть существует предельное распределение Z , такое что $X_1(t) - X_2(t) \xrightarrow{d} Z$, $t \rightarrow \infty$. Можно показать, что распределение Z двустороннее экспоненциальное с плотностью $\frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$, $x \in R$.

Значит, $D(t) = X_{(2)}(t) - X_{(1)}(t) = |X_1(t) - X_2(t)| \xrightarrow{d} |Z|$, и $|Z| \stackrel{d}{=} \xi$, то есть стационарное распределение диаметра системы — показательное с тем же параметром λ .

Пусть начальное расстояние между частицами постоянно и равно $D(0)$. Оказывается, что распределение величины $|X_1(t) - X_2(t)|$ уже становится показательным, если левая частица хоть один раз перепрыгнет правую. На этом строится оценка скорости сходимости $D(t) \xrightarrow{d} |Z|$, $t \rightarrow \infty$. Эта оценка такова: для $\forall s \geq 0$

$$\left| P(D(t) > s) - e^{-\lambda s} \right| \leq 2 \cdot \frac{\lambda^t (D(0))^t}{t!}.$$

Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ. — 400 стр.

*Компьютерная верстка:
К. В. Просветов*

*Оригинал-макет подготовлен
при помощи программы MiKTeX
и шрифтов пакета PSCyr*

Подписано в печать 10.06.2006

Формат 60 × 90 1/16

Объем 25 п. л.

Заказ №

Тираж 50 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ,
г. Москва, Воробьевы горы.

Лицензия на издательскую деятельность ИД № 04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ.