

Асимптотическая теория представлений. Записки лекций

Григорий Ольшанский. Запись Леонида Петрова*

Версия от 13.12.09

Содержание

1	Лорановские многочлены Шура и характеры группы $U(N)$	1
2	Экстремальные характеры группы $U(\infty)$	13
3	Сдвинуто-симметрические функции Шура	25
4	Сдвинуто-симметрические функции Шура (продолжение)	37
5	Последовательности Вершика-Керова	49
6	Тотальная положительность	62
7	Тотальная положительность и теория представлений	75
8	Граф Гельфанда-Цетлина	87
9	Факторы фон Неймана	99
10	Представление Вейля и спинорное представление	108
11	Фактор-представления и сферические представления	119
12	Случайные матрицы и точечные процессы	132
13	Точечные процессы. Продолжение	143

1 Лорановские многочлены Шура и характеры группы $U(N)$

1.1 Алгебра многочленов Лорана

Пусть $u_1, \dots, u_N$ (где $N = 1, 2, 3, \dots$) — переменные. *Алгебра многочленов Лорана* от переменных $u_1, \dots, u_N$ — это $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$. Здесь и далее в этой лекции под многочленами будем понимать именно многочлены Лорана. Базис в $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ составляют элементы вида $u_1^{m_1} \dots u_N^{m_N}$, где $m_i \in \mathbb{Z}$.

*lenia.petrov@gmail.com

Определение 1.1. Алгебра A называется *градуированной* (или, точнее, $\mathbb{Z}$ -градуированной), если

$$A = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} A_m, \quad (1.1)$$

и при этом для всех m, n выполнено

$$A_m \cdot A_n \subseteq A_{m+n}. \quad (1.2)$$

Говорим, что все элементы подпространства $A_m \subset A$ имеют степень m . Таким образом, (1.2) означает, что если $\deg a = m$ и $\deg b = n$ для $a, b \in A$, то $\deg(ab) = m + n$.

Алгебра $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ является градуированной, если определить градуировку в ней следующим образом:

$$\deg(u_1^{m_1} \dots u_N^{m_N}) = \sum_{i=1}^N m_i, \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

Пусть $\mathfrak{S}_N$ — симметрическая группа на $\{1, \dots, N\}$. Эта группа порождена транспозициями (i, j) , $i, j = 1, \dots, N$. Группа $\mathfrak{S}_N$ действует на $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ перестановками переменных. Отметим, что перестановки переменных являются автоморфизмами алгебры $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$.

Определение 1.2. Многочлены в $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$, инвариантные относительно действия $\mathfrak{S}_N$, образуют подалгебру в $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$:

$$\text{LSym}(N) := \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_N}. \quad (1.4)$$

Она называется *алгеброй симметрических многочленов Лорана*. Это также градуированная алгебра.

Каждый многочлен $f \in \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ можно записать как

$$f(u) = \sum_{\mu} a_{\mu} u^{\mu}, \quad (1.5)$$

где сумма ведется по всем мультииндексам $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^N$, $u^{\mu} := u_1^{\mu_1} \dots u_N^{\mu_N}$. Если при этом $f \in \text{LSym}(N)$, то

$$a_{\mu} = a_{\sigma \cdot \mu} \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N \quad (1.6)$$

(здесь $\sigma \cdot \mu$ — действие элемента $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ на мультииндекс μ , заключающееся в перестановке компонент). Таким образом, каждый коэффициент a_{μ} постоянен на орбите $\mathfrak{S}_N \cdot \mu$. Выберем из этой орбиты удобного представителя.

Определение 1.3. *Сигнатурой* называется последовательность $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, $\mu_i \in \mathbb{Z}$, такая что $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_N$.¹ Число N называется *длиной сигнатуры*. Также определим $|\mu| := \sum_{i=1}^N \mu_i$. Отметим, что, несмотря на обозначение $|\cdot|$, эта величина может быть нулевой или отрицательной.

Используя понятие сигнатуры, определим простейший базис в алгебре симметрических многочленов Лорана $\text{LSym}(N)$. Для каждой сигнатуры μ положим

$$t_{\mu}(u) := \sum_{\nu \in \mathfrak{S}_N \cdot \mu} u^{\nu}, \quad (1.7)$$

где сумма ведется по всем *различными* мультииндексам ν , которые получаются из μ некоторой перестановкой. Многочлены t_{μ} называются *симметризованными мономы*. Они составляют однородный базис в $\text{LSym}(N)$.

¹Название «сигнатура» следует книге [Жел07], хотя в других местах этот объект может называться иначе.

Определение 1.4. Многочлен Лорана $f \in \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ называется *антисимметрическим*, если

$$f(\sigma \cdot u) = \text{sgn}(\sigma) \cdot f(u), \quad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_N. \quad (1.8)$$

Здесь $\text{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ . Антисимметрические многочлены Лорана образуют подпространство $\text{Alt}(N) \subset \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$. Кроме того, $\text{Alt}(N)$ — модуль над $\text{LSym}(N)$.

Базис в $\text{Alt}(N)$ составляют *антисимметризованные мономы* (другое название — *альтернанты*), определяемые следующим образом:

$$a_\mu := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \cdot u^{\sigma \cdot \mu}, \quad (1.9)$$

где μ — сигнатура.

Легко видеть, что

$$a_\mu(u) = \det \begin{pmatrix} u_1^{\mu_1} & \dots & u_N^{\mu_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{\mu_N} & \dots & u_N^{\mu_N} \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

поэтому если в μ есть одинаковые части, то $a_\mu = 0$. То есть, антисимметризованные мономы параметризуются сигнатурами, у которых все части различны.

Через δ обозначим специальную сигнатуру (длины N):

$$\delta := (N-1, N-2, \dots, 1, 0). \quad (1.11)$$

Пусть $V_N \in \text{Alt}(N)$ — антисимметризованный моном, соответствующий сигнатуре δ . Легко видеть, что это определитель Вандермонда переменных $u_1, \dots, u_N$:

$$V_N(u) := a_\delta(u) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (u_i - u_j). \quad (1.12)$$

Предложение 1.5. *Всякий антисимметрический многочлен Лорана делится на V_N , и в результате получается симметрический многочлен, то есть,*

$$\text{Alt}(N) = \text{LSym}(N) \cdot V_N. \quad (1.13)$$

Доказательство. Для любого $f \in \text{Alt}(N)$ найдется $k = 0, 1, 2, \dots$, такое что $f(u) \cdot (u_1 \dots u_N)^k$ уже является обычным многочленом, а не многочленом Лорана. Таким образом, утверждение сводится к обычным многочленам (см. Упражнение 1.1). $\square$

1.2 Многочлены Шура

Определение 1.6. Пусть λ — сигнатура длины N , $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Определим многочлены:

$$s_\lambda = s_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \frac{a_{\lambda+\delta}(u_1, \dots, u_N)}{a_\delta(u_1, \dots, u_N)} \in \text{LSym}(N). \quad (1.14)$$

Заметим, что в сигнатуре $\lambda + \delta$ уже все части разные, поэтому $a_{\lambda+\delta} \neq 0$.

Многочлены s_λ называются (лорановскими) *многочленами Шура*.²

Другой способ записать (1.14) с помощью (1.10):

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \frac{\det(u_j^{\lambda_i + N - i})_{i,j=1,\dots,N}}{\det(u_j^{N-i})_{i,j=1,\dots,N}}. \quad (1.15)$$

Свойства многочленов Шура:

²Отметим, что s_λ — многочлены Лорана, не всегда являющиеся обычными многочленами. Также для s_λ иногда используется название *рациональная функция Шура*, но мы не будем его использовать.

- s_λ — однородные многочлены, $\deg s_\lambda = |\lambda|$.
- Многочлены s_λ (где λ пробегает все сигнатуры) образуют базис в s_λ .
- Многочлены s_λ раскладываются по базису из симметризованных мономов:

$$s_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} m_\mu, \quad (1.16)$$

где $K_{\lambda\mu}$ называются *числами Костки*.³ Это неотрицательные целые числа.

Замечание 1.7. Легко видеть, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем $K_{\lambda+(k,k,\dots,k), \mu+(k,k,\dots,k)} = K_{\lambda\mu}$.

Пример 1.8. Для $N = 2$ числа $K_{\lambda\mu}$ имеют вид (пусть $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2)$):⁴

$$K_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu = (\lambda_1 - k, \lambda_2 + k), \text{ где } k \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.17)$$

Здесь условие $k \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$ означает лишь, что μ также должно быть сигнатурой.

1.3 Ортогональность многочленов Шура

Пусть теперь u_i — не формальные переменные, а

$$u_i \in \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.18)$$

На окружности $\mathbb{T}$ рассматриваем равномерную меру $l(du) = d\varphi/2\pi$, где $u = e^{i\varphi}$.

Определение 1.9. Определим для $f, g \in \text{LSym}(N)$ скалярное произведение:

$$(f, g) := \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} f(u) \overline{g(u)} |V_N(u)|^2 l(du_1) \dots l(du_N). \quad (1.19)$$

Здесь $V_N(u)$ — определитель Вандермонда (1.12).

Легко видеть, что $(\cdot, \cdot)$ — невырожденная полуторалинейная форма.

Предложение 1.10. Многочлены Шура s_λ образуют ортонормированный базис относительно введенного скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$.

Доказательство. По определению s_λ (определение 1.6), $s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$, $s_\mu = \frac{a_{\mu+\delta}}{a_\delta}$. Положим $\tilde{\lambda} = \lambda + \delta$, $\tilde{\mu} = \mu + \delta$. Заметим, что $|V_N(u)|^2 = a_\delta(u) \overline{a_\delta(u)}$, и поэтому

$$(s_\lambda, s_\mu) = \frac{1}{N!} \int_{\mathbb{T}} \dots \int_{\mathbb{T}} a_{\tilde{\lambda}}(u) \overline{a_{\tilde{\mu}}(u)} l(du_1) \dots l(du_N). \quad (1.20)$$

По определению антисимметризованных мономов можно записать⁵

$$a_{\tilde{\lambda}}(u) \overline{a_{\tilde{\mu}}(u)} = \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \cdot u^\alpha \overline{u}^\beta = \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \cdot u^{\alpha - \beta}, \quad (1.21)$$

где сумма ведется по всем $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_N$, и $\alpha = \sigma \tilde{\lambda}$, $\beta = \tau \tilde{\mu}$.

³В теории представлений $K_{\lambda\mu}$ также называется *кратностью веса*.

⁴См. упражнение 1.3.

⁵Ясно, что $\overline{u} = u^{-1}$.

Интеграл $\int_{\mathbb{T}^N} u^{\alpha-\beta} l(du_1) \dots l(du_N)$ отличен от нуля, только если $\alpha = \beta$.⁶ Так как α и β — перестановки соответственно $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$, то при $\lambda \neq \mu$ заведомо получаем, что $(s_\lambda, s_\mu) = 0$.

Пусть теперь $\lambda = \mu$. Так как $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{\mu}$ — сигнатуры, в которых все части различны, то $\mathfrak{S}_N$ на них действует транзитивно, а размер орбиты равен $N!$. Этот $N!$ сокращается с $\frac{1}{N!}$ из определения 1.9 скалярного произведения. $\square$

Замечание 1.11 (Как разлагать по многочленам Шура?). Пусть $f \in \text{LSym}(N)$. Так как многочлены s_λ образуют базис в $\text{LSym}(N)$, существует единственное разложение вида

$$f = \sum_{\lambda} f_{\lambda} s_{\lambda}. \quad (1.22)$$

Существует способ эффективно вычислять коэффициенты f_{λ} , а именно,

$$f_{\lambda} = [u^{\lambda+\delta}] (f \cdot V_N), \quad (1.23)$$

где $[u^{\lambda+\delta}] (\dots)$ обозначает коэффициент при $u^{\lambda+\delta}$ в $(\dots)$.

Действительно, (1.23) следует из того, что

$$f = \sum_{\lambda} f_{\lambda} s_{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad f \cdot V_N = \sum_{\lambda} f_{\lambda} a_{\lambda+\delta}. \quad (1.24)$$

1.4 Характеры унитарной группы

Оказывается, многочлены Шура $s_{\lambda}(u_1, \dots, u_N)$ суть неприводимые характеры унитарной группы $U(N)$. В следующем определении приводятся некоторые понятия теории представлений.

Определение 1.12. Пусть G — группа. Представление G — это гомоморфизм $G \rightarrow GL(V)$ где V — некоторое векторное пространство. Если $G \rightarrow GL(V_1)$ и $G \rightarrow GL(V_2)$ — два представления, то можно очевидным образом определить прямую сумму представлений $V_1 \oplus V_2$. Представление V называется неразложимым, если оно не представляется в виде $V = V_1 \oplus V_2$, где V_1 и V_2 — собственные подпространства в V . Любое неприводимое представление⁷ является неразложимым. У конечномерной компактной группы над $\mathbb{C}$ (например, $U(N)$) любое конечномерное представление раскладывается в прямую сумму неприводимых.

Представления можно изучать через изучение их характеров. Характер представления V — это функция на группе G , определяемая как

$$\chi^V(g) := \text{Tr}_V(g), \quad g \in G, \quad (1.25)$$

где $\text{Tr}_V(g)$ — след оператора, в который переходит элемент g в представлении V . Свойства:

- $\chi^V(e) = \dim V$ — размерность представления;
- Характер — центральная функция на группе, то есть, функция, которая постоянна на классах сопряженности G .

Мы будем стараться говорить о характерах, а не о представлениях. Характер неприводимого представления для краткости будем называть *неприводимым характером*.

⁶Заметим, что это не комплексный интеграл, а интеграл Лебега: $\int_0^{2\pi} e^{ic\varphi} d\varphi = 0$ для всех $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

⁷То есть, то, у которого нет нетривиальных собственных подпространств.

Замечание 1.13 (Двойное понимание характеров унитарной группы). Пусть V — какое-либо конечномерное представление группы $U(N)$. С одной стороны, характер χ^V можно понимать стандартным образом, как функцию на группе $U(N)$. С другой стороны, так как функция χ^V постоянна на классах сопряженности в $U(N)$, она полностью определяется своими значениями на диагональных матрицах

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_N \end{pmatrix}, \quad u_1, \dots, u_N \in \mathbb{T}. \quad (1.26)$$

Поэтому характер χ^V также можно рассматривать как функцию $\chi^V(u_1, \dots, u_N)$, $u_i \in \mathbb{T}$. Очевидно, что $\chi^V(u_1, \dots, u_N)$ — симметрическая функция.

Нам потребуется частичное упорядочение на сигнатурах:

Определение 1.14. Пусть λ и μ , $|\lambda| = |\mu|$ — сигнатуры. Говорим, что μ меньше λ в смысле *доминантности* (обозначение $\mu \triangleleft \lambda$), если μ получается из λ последовательностью элементарных преобразований вида

$$\nu \rightarrow \nu - \varepsilon_i + \varepsilon_j, \quad i < j, \quad (1.27)$$

где $\varepsilon_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на k -м месте), причем ν и $\nu - \varepsilon_i + \varepsilon_j$ должны быть сигнатурами.⁸ Эквивалентно можно сказать, что $\mu \triangleleft \lambda$, если

$$\sum_{i=1}^j \mu_i \leq \sum_{i=1}^j \lambda_i \quad \text{для всех } j = 1, \dots, N. \quad (1.28)$$

Таким образом, определен частичный порядок на каждом из множеств

$$\{\lambda - \text{сигнатура} : |\lambda| = m\}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (1.29)$$

Через Нааг обозначим меру Хаара на $U(N)$, то есть, левую инвариантную (или, что то же самое в случае $U(N)$, правую инвариантную) нормированную⁹ борелевскую меру на $U(N)$. Через $L^2(U(N), \text{Нааг})$ обозначается гильбертово пространство функций на $U(N)$, которые интегрируемы в квадрате по мере Хаара. Через $L^2(U(N), \text{Нааг})^{U(N)} \subset L^2(U(N), \text{Нааг})$ обозначим подпространство центральных функций.

Замечание 1.15. Мера Хаара на $U(N)$ может быть построена как форма объема. Возьмем в касательном пространстве $T_e U(N)$ поливектор порядка N (он единственный с точностью до константы) и разнесем его по всей группе $U(N)$ с помощью (например) левых сдвигов. Таким образом, мы получим форму объема на $U(N)$, которая на самом деле также будет инвариантна и относительно правых сдвигов. Нормировав ее, получим меру Хаара.

Приведем теорему о неприводимых характерах унитарной группы.

Теорема 1.16. *Неприводимые характеры группы $U(N)$ полностью характеризуются следующими двумя свойствами:*

(1) *Они параметризуются сигнатурами, и для всех сигнатур λ выполнено*

$$\chi^\lambda = t_\lambda + \sum_{\mu: |\mu|=|\lambda|, \mu \triangleleft \lambda, \mu \neq \lambda} c_{\lambda\mu} t_\mu. \quad (1.30)$$

Это тождество рассматривается как тождество для функций на $\mathbb{T}^N$ (см. замечание 1.13). Слагаемое t_λ рассматривается как старшее (при этом λ называется старшим весом представления), а сумма $\sum c_{\lambda\mu} t_\mu$ — как младшие члены.

(2) *$\{\chi^\lambda\}$ как функции на $U(N)$ образуют ортонормированный базис в $L^2(U(N), \text{Нааг})^{U(N)}$.*

⁸Ср. это с числами Костки для $N = 2$ (пример 1.8).

⁹То есть, $\text{Нааг}(U(N)) = 1$.

Условие (2) приходит из общей теории представлений компактных групп, а условие (1) — из теории представлений групп Ли (отсюда и понятие старшего веса).

Предложение 1.17. *Многочлены Шура $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$ суть неприводимые характеры группы $U(N)$.*

В силу предложения 1.10, достаточно доказать, что *радиальная часть* меры Хаара на $U(N)$ есть мера $|V_N(u_1, \dots, u_N)|^2 l(du_1) \dots l(du_N)$ на $\mathbb{T}^N$ (Упражнение 1.5).¹⁰

Замечание 1.18. Радиальную часть меры Хаара на $U(N)$ можно определить аналогично радиальной части меры Лебега в $\mathbb{R}^2$, а именно, мы знаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) r dr \cdot d\varphi. \quad (1.31)$$

Мера $r dr$ на $\mathbb{R}_{>0}$ называется радиальной частью меры Лебега. Разложение (1.31) обусловлено действием группы вращений $U(1)$ на $\mathbb{R}^2$.

В случае $U(N)$, в качестве группы вращений на $U(N)$ рассматривается сама группа $U(N)$, которая действует сопряжениями. В каждой орбите этого действия представителем выбирается диагональная матрица. Таким образом мы приходим к тору $\mathbb{T}^N$.

Замечание 1.19. Подчеркнем важный факт, что в данном курсе лекций мы не доказываем, что многочлены Шура являются неприводимыми характерами группы $U(N)$, а лишь показываем, как можно вывести этот факт (предложение 1.17) из общей теоремы 1.16. Последнюю теорему мы приводим без доказательства.

О мере Хаара на унитарной группе $U(N)$ и характерах этой группы можно прочитать в [Вей07, Глава VII, §4–5].

1.5 Правило ветвления многочленов Шура

Определение 1.20 (Общая задача редукции). В теории представлений рассматривается следующая *задача редукции*. Рассмотрим группу G и какое-то ее неприводимое представление. Рассмотрим подгруппу $H \subset G$. Ограничим это представление на H . Как представление группы H , оно часто оказывается приводимым. Задача состоит в том, чтобы разложить это представление группы H в сумму неприводимых представлений.

Группа $U(N)$ действует в $\mathbb{C}^N$. Подгруппа в $U(N)$, которая фиксирует последний базисный вектор — это в точности $U(N-1)$. Таким образом, есть вложение $U(N-1) \hookrightarrow U(N)$:

$$U(N-1) \ni A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \in U(N) \quad (1.32)$$

Рассмотрим задачу редукции для $U(N) \supset U(N-1)$. Ее можно переформулировать (с использованием предложения 1.17) как задачу о разложении многочлена Шура $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)|_{u_N=1}$ по базису $s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1})$ (заметим, что $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)|_{u_N=1}$ — уже элемент алгебры $\text{LSym}(N-1)$).

Для формулировки результата нам потребуется следующее определение:

Определение 1.21. Пусть λ — сигнатура длины N , μ — сигнатура длины $N-1$. Сигнатуры λ и μ *перемежаются* (обозначается $\mu \prec \lambda$), если

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{N-1} \geq \lambda_N. \quad (1.33)$$

¹⁰Здесь l — равномерная мера на окружности (§1.3).

Предложение 1.22 (Правило ветвления представлений $U(N)$ и многочленов Шура).

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N)|_{u_N=1} = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1}). \quad (1.34)$$

Доказательство. Пусть для наглядности $N = 3$ (для произвольного N доказательство аналогично). Пусть $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Из (1.15):

$$s_\lambda(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{V_3(u_1, u_2, u_3)} \begin{vmatrix} u_1^{\lambda_1+2} & u_2^{\lambda_1+2} & u_3^{\lambda_1+2} \\ u_1^{\lambda_2+1} & u_2^{\lambda_2+1} & u_3^{\lambda_2+1} \\ u_1^{\lambda_3} & u_2^{\lambda_3} & u_3^{\lambda_3} \end{vmatrix}. \quad (1.35)$$

Полагая $u_3 = 1$, запишем:

$$s_\lambda(u_1, u_2, 1) = \frac{1}{V_2(u_1, u_2) \cdot (u_1 - 1)(u_2 - 1)} \begin{vmatrix} u_1^{\lambda_1+2} & u_2^{\lambda_1+2} & 1 \\ u_1^{\lambda_2+1} & u_2^{\lambda_2+1} & 1 \\ u_1^{\lambda_3} & u_2^{\lambda_3} & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.36)$$

Вычитая в матрице из 1й строки 2ю, а затем из 2й — 3ю, получим

$$s_\lambda(u_1, u_2, 1) = \frac{1}{V_2(u_1, u_2) \cdot (u_1 - 1)(u_2 - 1)} \begin{vmatrix} u_1^{\lambda_1+2} - u_1^{\lambda_2+1} & u_2^{\lambda_1+2} - u_2^{\lambda_2+1} \\ u_1^{\lambda_2+1} - u_1^{\lambda_3} & u_2^{\lambda_2+1} - u_2^{\lambda_3} \end{vmatrix}. \quad (1.37)$$

Видно, что первый столбец делится на $u_1 - 1$, второй — на $u_2 - 1$. Знаем, что для $a > b$:

$$\frac{u^a - u^b}{u - 1} = \sum_{c: b \leq c < a} u^c. \quad (1.38)$$

С помощью этого наблюдения видно, что в результате деления на $u_1 - 1$ в первом столбце на первом месте возникнет сумма, которую удобно записать как

$$\sum_{\mu_1} u_1^{\mu_1+1}, \quad (1.39)$$

где $1 + \lambda_2 \leq \mu_1 + 1 < \lambda_1 + 2$ (то есть, $\lambda_2 \leq \mu_1 \leq \lambda_1$). Значение $\mu_1 + 1$ выбрано, чтобы результат было удобно сравнивать с (1.15). Рассмотрение остальных трех элементов матрицы аналогично, и предложение доказано. $\square$

Замечание 1.23. Одновременно предложение 1.22 является и решением задачи редукции для $U(N) \supset U(N-1)$, то есть, его можно сформулировать исключительно на языке теории представлений.

Замечание 1.24. В книге [Жел07] правило ветвления многочленов Шура получено другим методом.

1.6 Схемы Гельфанда–Цетлина

Итак, мы показали (предложение 1.22), что

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_{N-1}, 1) = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1}). \quad (1.40)$$

Можно не полагать $u_N = 1$, а отделить u_N и записать результат по степеням u_N :

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_{N-1}; u_N) = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1}) u_N^{|\lambda| - |\mu|}. \quad (1.41)$$

Степень $|\lambda| - |\mu|$ выбрана из соображений однородности многочленов s_λ и s_μ . Далее можно «откалывать» u_{N-1} , и так далее. Мы приходим следующему понятию:

Определение 1.25. *Схема Гельфанда–Цетлина* (или *таблица Гельфанда–Цетлина*) длины N — это последовательность сигнатур $\lambda^N \succ \lambda^{N-1} \succ \dots \succ \lambda^1$, где λ^i — сигнатура длины i . Это можно изображать в виде следующей таблицы (для наглядности $N = 3$):

$$\begin{array}{ccccc} & & \lambda_1^3 & & \lambda_2^3 & & \lambda_3^3 \\ & & & \lambda_1^2 & & \lambda_2^2 & \\ & & & & \lambda_1^1 & & \end{array} \quad (1.42)$$

Со схемой Гельфанда–Цетлина $T = \{\lambda^i\}$ длины N свяжем мультииндекс длины N :

$$n(T) := (|\lambda^1|, |\lambda^2| - |\lambda^1|, \dots, |\lambda^{N-1}| - |\lambda^{N-2}|, |\lambda^N| - |\lambda^{N-1}|). \quad (1.43)$$

Из предыдущих рассуждений (1.41) можно вывести следующую комбинаторную формулу для многочленов Шура:

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \sum_T u^{n(T)}, \quad (1.44)$$

где сумма ведется по всем схемам Гельфанда–Цетлина $T = \{\lambda^i\}$ длины N , таким что $\lambda^N = \lambda$.

Замечание 1.26. Из (1.44) не видно, что s_λ — симметрический многочлен. С другой стороны, из (1.44) ясно, что числа Костки (§1.2) $K_{\lambda\mu}$ действительно целые и неотрицательные.

Замечание 1.27. Множество схем Гельфанда–Цетлина T длины N , таких что $\lambda^N = \lambda$, представляет собой множество целых точек в некотором выпуклом множестве, так как все условия на компоненты сигнатур $\lambda^{N-1} \succ \dots \succ \lambda^1$ являются линейными. Всего неизвестных компонент сигнатур $\frac{N(N-1)}{2}$, так что данное выпуклое множество вложено в $\mathbb{R}^{N(N-1)/2}$.

1.7 Упражнения

Упражнение 1.1. Завершите доказательство предложения 1.5.

Упражнение 1.2. В алгебре многочленов Лорана $\mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$ (а также в подалгебре $\text{LSym}(N)$) рассмотрим автоморфизм

$$u_i \mapsto u_i^{-1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.45)$$

Докажите, что $s_\lambda(u^{-1}) = s_{\lambda^*}(u)$, где

$$\lambda^* = (-\lambda_N, -\lambda_{N-1}, \dots, -\lambda_2, -\lambda_1). \quad (1.46)$$

Упражнение 1.3. Проверьте утверждение примера 1.8.

Упражнение 1.4. Покажите, что число Костки $K_{\lambda\mu}$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\mu \triangleleft \lambda$ (см. определение 1.14).

Упражнение 1.5. * Закончите доказательство предложения 1.17.

Определение 1.28 (Носитель сигнатуры). Из того, что $s_\lambda \in \mathbb{C}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_N^{\pm 1}]$, следует, что

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^N} (?) \cdot u^\mu, \quad (1.47)$$

то есть, s_λ разлагается по обычным мономам с какими-то коэффициентами. Множество тех $\mu \in \mathbb{Z}^N$, для которых $[u^\mu](s_\lambda)$ (коэффициент при u^μ в s_λ) отличен от нуля,¹¹ называется *носителем сигнатуры* λ .

Попробуйте из комбинаторной формулы (1.44) для многочленов Шура получить следующее описание носителя сигнатуры λ :

Упражнение 1.6. Носитель сигнатуры λ — это в точности множество целых точек внутри (или на границе) выпуклой оболочки орбиты $\mathfrak{S}_N \cdot \lambda$.

¹¹Тогда он автоматически больше нуля, так как числа Костки $K_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

2 Экстремальные характеры группы $U(\infty)$

2.1 Определение бесконечномерной унитарной группы

В §1.5 были определены вложения унитарных групп $U(N) \hookrightarrow U(N+1)$, $N = 1, 2, \dots$. Разумно рассматривать все группы $U(N)$ вместе. Возникает *башня унитарных групп*

$$U(1) \subset U(2) \subset U(3) \subset \dots \quad (2.1)$$

Рассмотрим связанный с ней *индуктивный предел* групп $U(N)$:

Определение 2.1. *Бесконечномерной унитарной группой* называется $U(\infty) := \bigcup_{N=1}^{\infty} U(N)$.

Замечание 2.2. Существуют иные объекты, которые также называют бесконечномерной унитарной группой; $U(\infty)$ является в некотором смысле минимальным из них.

Элементами $U(\infty)$ являются матрицы бесконечного порядка $U = (u_{ij})_{i,j=1,2,\dots}$, которые

- унитарны: $UU^* = U^*U = 1$;
- удовлетворяют *условию финитности*, то есть, $u_{ij} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), если $i + j$ достаточно велико.

Другими словами, каждый элемент группы $U(\infty)$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} u_{11} & \dots & u_{1N} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \dots \\ u_{N1} & \dots & u_{NN} & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right) \quad (2.2)$$

для некоторого N , где матрица $(u_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in U(N)$.

Мы хотели бы определить для $U(\infty)$ аналог понятия неприводимого характера, или, что то же самое, аналог многочленов Шура s_λ (§1.2) от бесконечного числа переменных.¹²

2.2 Имеет ли смысл теория представлений группы $U(\infty)$?

Здесь мы перечислим некоторые трудности, возникающие при попытке описывать представления группы $U(\infty)$.

1. Все группы $U(N)$ компактны, однако $U(\infty)$ не является ни компактной, ни даже локально компактной (упражнение 2.1). Из-за этого многие привычные понятия и конструкции теории представлений локально компактных групп оказываются неприменимы к $U(\infty)$.
2. Неприводимых унитарных представлений группы $U(\infty)$ «слишком много», в том смысле, что разумно их классифицировать не получается. Поэтому следует рассматривать какой-то подкласс унитарных представлений $U(\infty)$.
3. У группы $U(\infty)$ почти нет конечномерных представлений (упражнение 2.2).

Пусть V — бесконечномерное представление $U(\infty)$. Так как след единичного оператора в V бесконечен, то характер в классическом смысле (центральную функцию на группе) с бесконечномерным представлением группы $U(\infty)$ связать нельзя.

¹²Выше в §1.4 многочлены Шура от N переменных были идентифицированы как неприводимые характеры группы $U(N)$.

2.3 Экстремальные характеры

Было разработано два подхода к обобщению понятия характера на некомпактные группы. Их можно условно связать с именами Гельфанда и фон Неймана.

Первый подход заключается в рассмотрении характера не как обычной функции на группе, а как обобщенной функции (то есть, распределения). Это позволяет говорить о следах операторов в обобщенном смысле. Данный подход прекрасно работает для многих конечномерных некомпактных групп Ли. Однако в случае $U(\infty)$ он неприменим.

Мы обратимся ко второму подходу, который заключается в рассмотрении нормированных и экстремальных характеров. Дадим несколько определений.

Определение 2.3. Пусть V — конечномерное представление группы G . *Нормированным характером* представления V называется функция на группе G вида

$$\tilde{\chi}^V(g) := \frac{\text{Tr } V(g)}{\text{Tr } V(e)} = \frac{\text{Tr } V(g)}{\dim V}, \quad g \in G. \quad (2.3)$$

Замечание 2.4. Если представление V унитарно, то $|\tilde{\chi}^V| \leq 1$ (упражнение 2.3).

Для групп $U(N)$ нормированные характеры превращаются в следующее:

Определение 2.5. Пусть λ — сигнатура длины N . *Нормированным многочленом Шура* называется

$$\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N) := \frac{s_\lambda(u_1, \dots, u_N)}{s_\lambda(1, \dots, 1)}. \quad (2.4)$$

Ясно, что $\tilde{s}_\lambda$ — нормированные характеры группы $U(N)$, рассматриваемые как функции на $\mathbb{T}^N$ (см. §1.4 и замечание 1.13).

Определение 2.6. Каждая группа $U(N)$ вложена в $U(\infty)$. Центральные функции на $U(N)$ можно рассматривать как функции на торе $\mathbb{T}^N$ (замечание 1.13). Определим бесконечный аналог торов $\mathbb{T}^N$ — тор $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \dots$, элементы которого содержат лишь конечное число не равных единице координат. Ясно, что каждый тор $\mathbb{T}^N$ естественно вкладывается в $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$.

Определение 2.7. Пусть $\chi_N \in C(\mathbb{T}^N)$ (непрерывная функция на $\mathbb{T}^N$), $N = 1, 2, \dots$. Говорим, что при $N \rightarrow \infty$ последовательность χ_N *сходится* к функции χ на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, если χ_N равномерно сходятся на каждом конечном подторе, то есть

$$\chi_N|_{\mathbb{T}^n} \rightrightarrows \chi|_{\mathbb{T}^n}, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{для каждого фиксированного } n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Определение корректно, поскольку функции $\chi_N|_{\mathbb{T}^n}$ определены при $N \geq n$.

Определение 2.8. Функция χ на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ называется *экстремальным характером* (группы $U(\infty)$), если найдется последовательность $\{\lambda(N)\}$ сигнатур, такая, что $\lambda(N)$ имеет длину N и

$$\tilde{s}_{\lambda(N)} \rightarrow \chi, \quad N \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

в смысле определения 2.7.

Замечание 2.9. Экстремальные характеры $U(\infty)$ — это аналоги нормированных характеров конечномерных групп $U(N)$. Они позволяют для $U(\infty)$ рассматривать выражения вида « $\frac{\text{Tr } V(g)}{\text{Tr } V(e)}$ », хотя по отдельности и числитель, и знаменатель бесконечны.

Основная цель этой и нескольких следующих лекций — описание всех экстремальных характеров группы $U(\infty)$.

2.4 Формула размерности

Для начала обратимся к величинам $s_\lambda(1, \dots, 1)$ (здесь λ — сигнатура длины N), стоящим в знаменателе в определении 2.5 нормированных многочленов Шура. Ясно, что $s_\lambda(1, \dots, 1)$ — размерность представления группы $U(N)$, соответствующего сигнатуре λ . Мы докажем одну полезную формулу для $s_\lambda(1, \dots, 1)$.

Предложение 2.10 (Формула размерности). *Пусть λ — сигнатура длины N , тогда*

$$s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}. \quad (2.7)$$

Замечание 2.11. (1) На самом деле, это частный случай общей формулы Вейля для размерностей.

(2) Легко видеть, что $\prod_{1 \leq i < j \leq N} (j - i) = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot (N - 1)!$, однако в виде (2.7) формула выглядит симметричней, и ее легче запомнить (ср. с (1.15)). Также при $\lambda = (0, 0, \dots, 0)$ из (2.7) сразу получаем $s_{(0, \dots, 0)}(1, \dots, 1) = 1$.

Доказательство. Необходимо в формуле (1.15) положить $u_1 = \dots = u_N$. Это можно сделать, так как $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$ является многочленом Лорана, непрерывным на $\mathbb{T}^N$ (и даже на $(\mathbb{C}^*)^N$). Однако, напрямую в (1.15) это сделать нельзя из-за возникающей неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Можно было бы воспользоваться правилом Лопиталья, однако мы сделаем по-другому, и в два этапа — сначала положим

$$u_1 = q^{N-1}, \quad u_2 = q^{N-2}, \quad \dots, \quad u_N = 1 \quad (2.8)$$

(где $q \in \mathbb{R}$), а затем перейдем к пределу при $q \rightarrow 1$. До предела формулой (1.15) можно пользоваться, так как все u_i различны. Для числителя имеем:

$$\det(u_j^{\lambda_i + N - i})_{1 \leq i, j \leq N} = \det((q^{\lambda_i + N - i})^{N - j})_{1 \leq i, j \leq N} = V_N(q^{\lambda_1 + N - 1}, q^{\lambda_2 + N - 2}, \dots, q^{\lambda_N}), \quad (2.9)$$

где V_N — определитель Вандермонда (1.12). Аналогично можно записать и для знаменателя,¹³ поэтому

$$s_\lambda(q^{N-1}, q^{N-2}, \dots, 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{q^{\lambda_i + N - i} - q^{\lambda_j + N - j}}{q^{N-i} - q^{N-j}} = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{q^{\lambda_i - i} - q^{\lambda_j - j}}{q - 1} \cdot \frac{q - 1}{q^{-i} - q^{-j}}. \quad (2.10)$$

Осталось заметить, что $\frac{q^a - q^b}{q - 1} \rightarrow (a - b)$ при $q \rightarrow 1$. $\square$

2.5 Два примера экстремальных характеров

В конце §2.3 была сформулирована основная цель — описание всех экстремальных характеров группы $U(\infty)$. Таким образом, надо рассмотреть всевозможные последовательности сигнатур $\lambda(N)$, для которых у нормированных многочленов Шура $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ есть предел в смысле определения 2.7. В этом подразделе мы рассмотрим два частных случая этой общей ситуации, когда сигнатуры $\lambda(N)$ имеют специальный вид. Здесь и далее иногда будем опускать индекс N у сигнатур $\lambda(N)$.

Итак, рассмотрим два выделенных класса сигнатур (в первом случае $0 \leq L \leq N$, а во втором $L = 0, 1, \dots$):

- $\lambda = (\underbrace{1, \dots, 1}_L, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-L})$, будем обозначать это через $\lambda = (1^L 0^{N-L})$;

¹³Напомним, что знаменатель в (1.15) получается из числителя, если положить $\lambda = (0, \dots, 0)$.

- $\lambda = (L, 0, \dots, 0)$.

Замечание 2.12. Опишем, какие представления группы $U(N)$ связаны с $(1^L 0^{N-L})$ и $(L, 0, \dots, 0)$. Обозначим тавтологическое представление группы $U(N)$ в пространстве $\mathbb{C}^N$ через V . Рассмотрим модуль $V^{\otimes L}$. Он является приводимым. В $V^{\otimes L}$ можно выделить две простейшие неприводимые компоненты — антисимметрическую и симметрическую:

- $\wedge^L V \subset V^{\otimes L}$ — соответствует $\lambda = (1^L 0^{N-L})$;
- $S^L V \subset V^{\otimes L}$ — соответствует $\lambda = (L, 0, \dots, 0)$.

Далее мы идентифицируем многочлены Шура $s_{(1^L 0^{N-L})}$ и $s_{(L, 0, \dots, 0)}$.

Определение 2.13. (1) *Элементарным симметрическим многочленом* называется

$$e_L(u_1, \dots, u_N) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_L \leq N} u_{i_1} \dots u_{i_L}. \quad (2.11)$$

Естественно считать, что $0 \leq L \leq N$, иначе $e_L(u_1, \dots, u_N) = 0$. Также e_L можно записать в виде

$$e_L(u_1, \dots, u_N) = \sum_I u^I, \quad (2.12)$$

где сумма ведется по всем подмножествам $I \subset \{1, \dots, N\}$ мощности $|I| = L$.

(2) *Полным однородным симметрическим многочленом* называется

$$h_L(u_1, \dots, u_N) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_L \leq N} u_{i_1} \dots u_{i_L}. \quad (2.13)$$

Заметим, что здесь уже может быть $L > N$. Название «полные однородные симметрические многочлены» связано с тем, что

$$h_L(u_1, \dots, u_N) = \sum u_1^{m_1} \dots u_N^{m_N}, \quad (2.14)$$

где сумма ведется по всем $(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с $m_1 + \dots + m_N = L$. Таким образом, полный однородный симметрический многочлен h_L — это сумма всех различных мономов степени L . Также h_L можно записать в виде

$$h_L(u_1, \dots, u_N) = \sum_J u^J, \quad (2.15)$$

где сумма ведется по всем *мультимножествам* $J \subset \{1, \dots, N\}$ мощности $|J| = L$.¹⁴

Предложение 2.14. Для всех $N = 1, 2, \dots$, $0 \leq L \leq N$:

$$\begin{aligned} s_{(1^L 0^{N-L})}(u_1, \dots, u_N) &= e_L(u_1, \dots, u_N); \\ s_{(L, 0, \dots, 0)}(u_1, \dots, u_N) &= h_L(u_1, \dots, u_N). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Доказательство. Упражнение 2.4. □

Замечание 2.15. Существует глубокая аналогия между внешней и симметрической степенями $\wedge^L V$ и $S^L V$, и соответственно между элементарными и полными однородными симметрическими многочленами. Можно сказать, что $\wedge^L V$ соответствует частицами-фермионам, а $S^L V$ — частицам-бозонам.

Перейдем к исследованию асимптотического поведения характеров описанного специального вида. Другими словами, найдем пределы (в смысле определения 2.7) нормированных элементарных и полных однородных симметрических многочленов.

¹⁴Мультимножество — это обобщение понятия множества, допускающее включение одного и того же элемента по нескольку раз, например, $\{1, 1, 3, 4, 4, 4, \dots\}$. Мощность мультимножества J — это число его элементов с учетом кратности.

2.5.1 Элементарные симметрические многочлены

Здесь мы найдем предел нормированных элементарных симметрических многочленов. Напомним (определение 2.5), что они определяются так:

$$\tilde{e}_L(u_1, \dots, u_N) = \frac{e_L(u_1, \dots, u_N)}{e_L(1, \dots, 1)}, \quad 0 \leq L \leq N. \quad (2.17)$$

Наша задача состоит в том, чтобы понять, как следует выбирать $L = L(N)$, чтобы при $N \rightarrow \infty$ существовал предел $\tilde{e}_{L(N)}$ в смысле определения 2.7, а также найти этот предел. Решение задачи дает следующее

Предложение 2.16. Пусть

$$\frac{L(N)}{N} \rightarrow \beta, \quad N \rightarrow \infty, \quad (2.18)$$

где $0 \leq \beta \leq 1$. Тогда в смысле определения 2.7,

$$\tilde{e}_{L(N)} \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta(u_i - 1)), \quad N \rightarrow \infty, \quad (u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{T}_{\text{fin}}^{\infty}. \quad (2.19)$$

Поскольку лишь конечное число координат u_i отличны от 1, произведение по i фактически конечно.

Доказательство. Можно было бы зафиксировать n , как в определении 2.7, и вычислять функцию $\tilde{e}_{L(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1)$ непосредственно, а затем считать ее предел. Мы же используем несколько иной подход.

Элементарный симметрический многочлен e_L можно записать в виде (2.12). Подмножество $I \subset \{1, \dots, N\}$ будем рассматривать как конфигурацию точек на $\{1, \dots, N\}$ (так что никакие две точки не могут находиться в одном и том же месте). Эту конфигурацию можно кодировать бинарным вектором $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, где $\varepsilon_i = 0$ или 1 в зависимости от того, лежит ли точка i в I или нет. На множестве всех L -точечных конфигураций $I \subset \{1, \dots, N\}$ (всего их $\binom{N}{L}$) рассмотрим равномерную вероятностную меру.

Из (2.12) получаем, что

$$\tilde{e}_L(u_1, \dots, u_N) = \frac{\sum_I u^I}{\sum_I 1}, \quad (2.20)$$

где сумма ведется по всем L -точечным конфигурациям $I \subset \{1, \dots, N\}$. Поэтому (упражнение 2.5) для каждого фиксированного $n \leq N$ имеем

$$\tilde{e}_L(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1) = \sum u_1^{\varepsilon_1} \dots u_n^{\varepsilon_n} \text{Prob} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}, \quad (2.21)$$

где сумма ведется по всем векторам $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, и $\text{Prob} \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ — вероятность того, что у нашего случайного бинарного вектора ε длины N первые n координат равны $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ соответственно.

Остается сослаться на сформулированное ниже предложение 2.17. $\square$

Пусть $L = L(N)$, и $L(N)/N \rightarrow \beta$ при $N \rightarrow \infty$, где $0 \leq \beta \leq 1$. Для каждого фиксированного N рассмотрим множество всех $L(N)$ -точечных конфигураций в $\{1, \dots, N\}$. Пусть M_N — равномерная мера на этом множестве конфигураций. Эту меру можно рассматривать и как меру на $\{0, 1\}^N$, отождествляя конфигурацию $I \subset \{1, \dots, N\}$ с бинарным вектором $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$, $\varepsilon_i = 0$ или 1. Далее, рассмотрим пространство $\{0, 1\}^{\infty}$ с произведением топологией. На $\{0, 1\}^{\infty}$ есть мера Бернулли с параметром β , которая определяется как произведение мер, то есть,

$$M = \bigotimes_{i=1}^{\infty} ((1 - \beta)\delta_0 + \beta\delta_1), \quad (2.22)$$

где δ_k ($k = 0, 1$) — дельта-мера Дирака. Другими словами, случайный элемент пространства $\{0, 1\}^\infty$, распределенный по мере Бернулли, представляет собой последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значение 1 с вероятностью β и 0 — с вероятностью $1 - \beta$.

Предложение 2.17. *При $N \rightarrow \infty$ меры M_N сходятся к мере Бернулли на $\{0, 1\}^\infty$ с параметром β на $\{0, 1\}^\infty$ в смысле сходимости конечномерных распределений.*

2.5.2 Полные однородные симметрические многочлены

Перейдем к случаю полных однородных симметрических многочленов. Напомним (определение 2.5), что они определяются так:

$$\tilde{h}_L(u_1, \dots, u_N) = \frac{h_L(u_1, \dots, u_N)}{h_L(1, \dots, 1)}. \quad (2.23)$$

Заметим, что здесь уже $L \geq 0$ может быть сколь угодно большим. Наша задача как и ранее состоит в том, чтобы описать возможный выбор $L = L(N)$, при котором существует предел $\tilde{h}_{L(N)}$ в смысле определения 2.7, а также найти этот предел.

Предложение 2.18. *Пусть*

$$\frac{L(N)}{N} \rightarrow \alpha, \quad N \rightarrow \infty, \quad (2.24)$$

где $\alpha \geq 0$. Тогда в смысле определения 2.7,

$$\tilde{h}_{L(N)} \rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha(u_i - 1)}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty. \quad (2.25)$$

Отметим, что в правой части (2.25) снова стоит функция на торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, поэтому фактически произведение по i конечно.

Предложение 2.18 доказывается аналогично 2.16, только надо рассматривать равномерную меру на L -точечных мультимножествах в $\{1, \dots, N\}$ (разумеется, у нее будет другой предел).

Более подробно, рассмотрим множество мультимножеств в $\{1, \dots, N\}$ мощности L . Каждое такое мультимножество можно рассматривать как L -точечную конфигурацию в $\{1, \dots, N\}$ в которой две точки могут находиться в одном и том же месте. Такие мультимножества можно кодировать векторами $(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$, где m_i — число точек конфигурации в i (ясно, что $m_1 + \dots + m_N = L$). Пусть M_N — равномерная мера на множестве всех таких конфигураций в $\{1, \dots, N\}$. Мы можем рассматривать M_N как меру на $\mathbb{Z}_{\geq 0}^N$.

Предложение 2.19. *Пусть $L = L(N)$ и $L(N)/N \rightarrow \alpha \geq 0$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ меры M_N сходятся к произдкт-мере на $\mathbb{Z}_{\geq 0}^\infty$,*

$$\bigotimes_{i=1}^{\infty} \nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}, \quad (2.26)$$

где $\nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ — геометрическое вероятностное распределение на $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ с параметром $\frac{\alpha}{\alpha+1}$:

$$\nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(m) := \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+1}\right) \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^m, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (2.27)$$

С использованием этого предложения можно установить сходимость нормированных полных однородных симметрических многочленов (предложение 2.18).

2.6 Описание экстремальных характеров $U(\infty)$

Теперь перейдем к описанию экстремальных характеров бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$. Но прежде сделаем еще одно замечание о тех двух простейших случаях, которые мы рассмотрели в §2.5.

Замечание 2.20. Напомним, что в алгебре симметрических многочленов Лорана от N переменных есть инволютивный автоморфизм (упражнение 1.2), который переводит каждое u_i в u_i^{-1} . Ясно, что эта инволюция не меняет факт сходимости (в смысле определения 2.7) нормированных функций Шура $\tilde{s}_{\lambda(N)}$. Однако она меняет предел, действуя на торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ тем же образом, переводя каждое u_i в u_i^{-1} .

Значит, из уже доказанной в §2.5 сходимости (обозначения β^+ вместо β и α^+ вместо α выбраны, чтобы показать симметричность этой ситуации с тем, что будет ниже):

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{L(N)} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta^+(u_i - 1)), & \text{если } \frac{L(N)}{N} \rightarrow \beta^+, & 0 \leq \beta^+ \leq 1; \\ \tilde{h}_{L(N)} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha^+(u_i - 1)}, & \text{если } \frac{L(N)}{N} \rightarrow \alpha^+, & \alpha^+ \geq 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

получаем, что в смысле определения 2.7 выполнено:¹⁵

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{(0^{N-L(N)}(-1)^{L(N)})} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta^-(u_i^{-1} - 1)), & \text{если } \frac{L(N)}{N} \rightarrow \beta^-, & 0 \leq \beta^- \leq 1; \\ \tilde{s}_{(0, -L(N))} &\rightarrow \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha^-(u_i^{-1} - 1)}, & \text{если } \frac{L(N)}{N} \rightarrow \alpha^-, & \alpha^- \geq 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Теперь можно сформулировать часть основной теоремы об экстремальных характерах группы $U(\infty)$. Мы опишем, какие функции на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ могут служить экстремальными характерами группы $U(\infty)$, однако пока не будем говорить о том, какие последовательности сигнатур $\lambda(N)$ надо взять, чтобы их получить.

Теорема 2.21. *Экстремальные характеры $U(\infty)$ суть в точности функции на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, зависящие от счетного числа параметров¹⁶*

$$\begin{aligned} \alpha^\pm &= (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \beta^\pm &= (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \gamma^\pm &\geq 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

таких что

$$\sum_i \alpha_i^+ + \sum_i \alpha_i^- + \sum_i \beta_i^+ + \sum_i \beta_i^- < \infty, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1. \quad (2.31)$$

Эти функции имеют вид

$$\chi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(u_1, u_2, \dots) = \prod_{j=1}^{\infty} \Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(u_j), \quad (2.32)$$

где $\Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(\cdot)$ — непрерывная функция на одномерном торе $\mathbb{T}^1$:

$$\Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(u) := e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \cdot \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)} \right). \quad (2.33)$$

¹⁵Здесь, пользуясь предложением 2.14 и упражнением 1.2, получаем, что при нашей инволюции $\text{LSym}(N)$ функции e_L и h_L переходят в $s_{(0^{N-L}(-1)^L)}$ и $s_{(0, -L)}$, соответственно.

¹⁶Более точно, от $4 \cdot \infty + 2$ параметров.

Замечание 2.22 (О формулировке теоремы). Экстремальные характеры $U(\infty)$ одновременно и проще, и сложнее, чем (обычные) характеры конечномерных групп $U(N)$. Детерминанты высокого порядка в (1.15) сложнее, чем произведения в (2.33), однако экстремальные характеры $\chi_{\alpha^{\pm}, \beta^{\pm}, \gamma^{\pm}}$ зависят от бесконечного числа переменных.

Заметим, что из двойной мультипликативности экстремальных характеров $\chi_{\alpha^{\pm}, \beta^{\pm}, \gamma^{\pm}}$ следует, что произведение двух экстремальных характеров $U(\infty)$ — снова экстремальный характер. В свою очередь, правило умножения неприводимых характеров (то есть, правило разложения произведения двух неприводимых характеров по базису из неприводимых характеров) группы $U(N)$ — правило Литтлвуда–Ричардсона — формулируется в достаточно сложных комбинаторных терминах.¹⁷

2.7 Упражнения

Упражнение 2.1. Покажите, что для $N = 1, 2, \dots$ группа $U(N)$ компактна. Покажите, что $U(\infty)$ не является компактной. Подумайте, почему $U(\infty)$ не является локально компактной.

Упражнение 2.2. Что можно сказать о конечномерных неприводимых представлениях $U(\infty)$?

Упражнение 2.3. Докажите, что модуль следа унитарной матрицы размера $m \times m$ не превосходит m .

Упражнение 2.4. Докажите предложение 2.14.

Указание. Посмотрите, что получается с $e_L(u_1, \dots, u_N)$ и $h_L(u_1, \dots, u_N)$ при подстановке $u_N = 1$ и сравните это с общим правилом ветвления многочленов Шура (§1.5).

Упражнение 2.5. Проверьте формулу (2.21).

Упражнение 2.6. Закончите доказательство предложения 2.16, сославшись на предложение 2.17.

Упражнение 2.7. Докажите предложение 2.17.

Упражнение 2.8. Проведите полностью доказательства о сходимости нормированных полных однородных симметрических многочленов (§2.5.2).

Указание к предложению 2.19. Предложение 2.19 можно доказать с помощью аналогичного предложения 2.17, используя соответствие между L -точечными мультимножествами в $\{1, \dots, N\}$ и L -точечными конфигурациями в $\{1, \dots, N + L - 1\}$. А именно, пусть $(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$ — L -точечное мультимножество в $\{1, \dots, N\}$ (m_i — число точек мультимножества в i), поставим ему в соответствие конфигурацию вида

$$\underbrace{1 \dots 1}_{m_1} \underbrace{0 1 \dots 1}_{m_2} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{m_N}. \quad (2.34)$$

Это биекция, поэтому равномерная мера переходит в равномерную. Используя предложение 2.17, получим, что при $N \rightarrow \infty$ меры на L -точечных конфигурациях в $\{1, \dots, N + L - 1\}$ сходятся к мере Бернулли на $\{0, 1\}^\infty$ с параметром $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ (так как $\frac{L(N)}{N+L(N)-1} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1}$). Пусть теперь есть элемент $\{0, 1\}^\infty$, распределенный по мере Бернулли с параметром $\frac{\alpha}{\alpha+1}$, то есть, последовательность независимых бинарных случайных величин. Остается воспользоваться тем, что геометрическое распределение с параметром $\frac{\alpha}{\alpha+1}$ можно трактовать как распределение позиции первого нуля в этой последовательности. Таким образом можно получить последовательность независимых геометрических величин с распределением $\nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$ (то есть, продакт-меру $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \nu_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$) из меры Бернулли на $\{0, 1\}^\infty$.

¹⁷Оказывается, доказать, что при $N \rightarrow \infty$ правило Литтлвуда–Ричардсона тривиализуется, можно и не используя формулу для характеров $U(\infty)$, выписанную выше в теореме 2.21.

Упражнение 2.9. Проверьте, что произведение двух экстремальных характеров $U(\infty)$ — снова экстремальный характер (см. замечание 2.22). Как связаны параметры $\alpha^\pm$, $\beta^\pm$, $\gamma^\pm$ исходных характеров с параметрами результата?

Упражнение 2.10. Отметим, что условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ в теореме 2.21 формально не является необходимым для того, чтобы характер $\chi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}$, определенный по формулам (2.32)–(2.33), существовал.¹⁸ Однако, это условие обеспечивает однозначность в следующем смысле. Возьмем два любых номера i и j и поставим вместо β_i^+ число $1 - \beta_j^-$, а вместо β_j^- — число $1 - \beta_i^+$. Проверьте, что от этого функция $\Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(\cdot)$ в (2.33) не изменится. Покажите, что если условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ не выполнено, то конечной последовательностью указанных преобразований его выполнения всегда можно добиться.

3 Сдвинуто-симметрические функции Шура

3.1 Идея доказательства теоремы Войкулеску

В этой лекции мы введем некоторый формализм, который будет использоваться в доказательстве формулы Войкулеску (теорема 2.21). Напомним, что нам надо найти все последовательности сигнатур $\lambda(N)$, для которых нормированные многочлены Шура $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ сходятся при $N \rightarrow \infty$ (в смысле определения 2.7), а также описать все функции на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, которые могут выступать в роли пределов $\tilde{s}_{\lambda(N)}$.

Неизвестно, можно ли развить «элементарные» методы §2.5 для доказательства теоремы 2.21 во всей общности. Это было сделано лишь для случая сигнатур с неотрицательными компонентами $\square$.

Мы используем другой подход (изложенный в $\square$), который основан на идее Вершика и Кера $\square$. Напомним, что сходимость функций $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ к некоторой функции χ на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ в смысле определения 2.7 означает равномерную сходимость их ограничений на каждый конечный тор $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, то есть,

$$\tilde{s}_{\lambda(N)}|_{\mathbb{T}^n} \rightrightarrows \chi|_{\mathbb{T}^n}, \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{для каждого фиксированного } n = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Наш подход заключается в том, чтобы заменить эту глобальную сходимость инфинитезимальной. А именно, каждая из функций $\tilde{s}_{\lambda(N)}|_{\mathbb{T}^n}$ и $\chi|_{\mathbb{T}^n}$ является аналитической на торе $\mathbb{T}^n$ и, следовательно, полностью определяется своей струей (набором всех производных) в любой точке, например, в $(1, \dots, 1)$. Мы будем рассматривать разложение Тейлора функций $\tilde{s}_{\lambda(N)}|_{\mathbb{T}^n}$ в точке $(1, \dots, 1)$ и анализировать асимптотику коэффициентов этих разложений. Отсюда будет следовать и сходимость нормированных многочленов Шура $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ в смысле определения 2.7.

Замечание 3.1. Вообще говоря, глобальная и инфинитезимальная сходимость — вещи разные. Но в нашем случае эти две сходимости оказываются эквивалентными.

Итак, пусть λ — сигнатура длины N и $n \leq N$ фиксировано. Наша задача — разложить функцию $\tilde{s}_\lambda|_{\mathbb{T}^n}$, то есть, функцию $\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1)$ (здесь $(N - n)$ единиц) в ряд Тейлора в точке $(1, \dots, 1)$ на торе $\mathbb{T}^n$. Для этого разложения нам потребуется локальная карта на торе вокруг $(1, \dots, 1)$. Можно было бы брать стандартную карту вида $u_j = e^{\varphi_j \sqrt{-1}}$, однако нам будет удобней «карта» $u_j = 1 + x_j$, где $x_j \in \mathbb{C}$. При такой «карте» переменные u_j выйдут за пределы тора $\mathbb{T}^n$. Однако, функция $\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1)$ является аналитической в большей области, чем $\mathbb{T}^n$, а именно, в $(\mathbb{C}^*)^n$. Поэтому можно рассматривать замену переменных $u_j = 1 + x_j$ и раскладывать функцию $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_n, 1, \dots, 1)$ в ряд Тейлора по переменным $x_1, \dots, x_n$ в точке $(0, \dots, 0)$. Это будет сделано в §3.3 ниже, после того как в §3.2 мы дадим необходимые определения.

¹⁸В отличие от условия $\sum \alpha_i^+ + \sum \alpha_i^- + \sum \beta_i^+ + \sum \beta_i^- < \infty$, гарантирующего сходимость произведения в (2.33).

3.2 Разбиения и многочлены Шура

Через $\text{Sign}(N)$ будем обозначать множество сигнатур длины N . Введем также множество *разбиений* Part . Разбиение числа k — это представление k в виде

$$k = \rho_1 + \rho_2 + \dots, \quad \text{где } \rho_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (3.2)$$

Слагаемые считаются неупорядоченными, но мы принудительно их упорядочиваем по (нестро-гому) убыванию, и приходим к тому, что разбиение — это невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $\rho = (\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots)$, в которой только конечное число компонент отлично от нуля. Обозначим $|\rho| := \sum_{i=1}^{\infty} \rho_i$ (фактически эта сумма конечна), и если $|\rho| = k$, то говорим, что ρ — разбиение числа k . Число ненулевых компонент разбиения ρ называем *длиной разбиения* и обозначаем через $\ell(\rho)$. К разбиению ρ можно дописывать любое количество нулей, такие разбиения мы считаем равными. В этой лекции нас интересуют разбиения ρ с любым $|\rho|$, но иногда мы будем накладывать ограничения на длину разбиения (см., напр., (3.3), (3.5) ниже).

Пример 3.2. Для разбиения $\rho = (5, 5, 3, 1, 0, 0, 0)$ имеем $|\rho| = 14$ и $\ell(\rho) = 4$.

Замечание 3.3. Хотя сигнатуры с неотрицательными компонентами можно рассматривать и как разбиения, мы не будем отождествлять эти два понятия.

Определение 3.4. Через $\Lambda(N)$ будем обозначать алгебру симметрических многочленов от N переменных $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$. Отметим, что это уже многочлены в традиционном смысле, а не многочлены Лорана. Для каждого разбиения $\mu \in \text{Part}$ через $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ обозначим соответствующий многочлен Шура (определяемый в §1.2).¹⁹

Предложение 3.5. Для всех $\mu \in \text{Part}$, таких что $\ell(\mu) \leq N$, многочлен Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ лежит в $\Lambda(N)$.²⁰ Многочлены $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$, где μ пробегает все разбиения, такие что $\ell(\mu) \leq N$, образуют однородный базис в алгебре $\Lambda(N)$.

Доказательство. Упражнение 3.1. □

3.3 Биномиальная формула

Пусть $\lambda \in \text{Sign}(N)$, и зафиксируем $n \leq N$. Мы собираемся раскладывать нормированный (лорановский) многочлен Шура $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_n, 1, \dots, 1)$ в ряд Тейлора по переменным $x_1, \dots, x_n$ в точке $(0, \dots, 0)$, см. §3.1. На самом деле, мы разложим многочлен $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N)$ по $x_1, \dots, x_N$, а затем, если надо, положим $x_{n+1} = \dots = x_N = 0$. Так как $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N)$ — симметрический многочлен Лорана, то и все коэффициенты Тейлора будут симметричны по $x_1, \dots, x_N$. В силу предложения 3.5, возможно раскладывать многочлены $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N)$ сразу по многочленам Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$, где $\ell(\mu) \leq N$.

Определение 3.6. Пусть $c_\mu(\lambda)$ — соответствующие коэффициенты этого разложения, то есть,

$$\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} c_\mu(\lambda) s_\mu(x_1, \dots, x_N). \quad (3.3)$$

Постараемся найти коэффициенты $c_\mu(\lambda)$. Для начала будем раскладывать многочлены s_λ , а не $\tilde{s}_\lambda$, а на известную величину $s_\lambda(1, \dots, 1)$ (см. предложение 2.10) разделим потом. Сначала выпишем очевидный случай $N = 1$:

¹⁹В §1.2 определялись многочлены Шура $s_\lambda(x_1, \dots, x_N)$, где λ — сигнатура длины N . Для $\mu \in \text{Part}$ возможны два случая. Если $\ell(\mu) \leq N$, то $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ определяется как лорановский многочлен Шура, соответствующий сигнатуре $(\mu_1, \dots, \mu_{\ell(\mu)}, 0, \dots, 0)$ длины N . Если же $\ell(\mu) > N$, то как будет видно из предложения 3.9 ниже, естественно положить $s_\mu(x_1, \dots, x_N) = 0$.

²⁰То есть, является многочленом в традиционном смысле, а не многочленом Лорана.

Предложение 3.7. Для всех $l \in \mathbb{Z}$,

$$u^l = (1+x)^l = \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \binom{l}{m} x^m. \quad (3.4)$$

Его обобщение выглядит следующим образом:

Предложение 3.8 (Биномиальная формула). Для любой сигнатуры $\lambda \in \text{Sign}(N)$ имеем

$$s_\lambda(1+x_1, \dots, 1+x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} \det \left[\binom{\lambda_i + N - i}{\mu_j + N - j} \right] s_\mu(x_1, \dots, x_N). \quad (3.5)$$

В правой части (3.5) стоят определители $N \times N$ матриц, $i, j = 1, \dots, N$. Далее в этой лекции аналогичные определители также имеют размер $N \times N$, если явно не обозначено противное.

Доказательство. Положим $l_i := \lambda_i + N - i$, $i = 1, \dots, N$. Тогда из (1.15) получаем

$$s_\lambda(1+x_1, \dots, 1+x_N) = \frac{\det [(1+x_j)^{l_i}]}{V_N(1+x_1, \dots, 1+x_N)}, \quad (3.6)$$

где V_N — определитель Вандермонда (1.12). Ясно, что $V_N(1+x_1, \dots, 1+x_N) = V_N(x_1, \dots, x_N)$, так как значение определителя Вандермонда зависит только от разностей переменных. Рассмотрим числитель в правой части (3.6). Пользуясь (3.4), можно записать

$$\det [(1+x_j)^{l_i}] = \det \left[\sum_{m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \binom{l_i}{m_j} x_j^{m_j} \right]. \quad (3.7)$$

Здесь индексы суммирования обозначены через m_j , чтобы можно было переписать это в удобном для нас виде:

$$\det \left[\sum_{m_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \binom{l_i}{m_j} x_j^{m_j} \right] = \sum_{m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N} \det \left[\binom{l_i}{m_j} \right]. \quad (3.8)$$

Можно считать, что суммирование ведется по мультииндексам $(m_1, \dots, m_N)$ с попарно различными координатами m_i , иначе $\det \left[\binom{l_i}{m_j} \right] = 0$. Рассмотрим действие группы $\mathfrak{S}_N$ перестановками на таких мультииндексах. Каждая орбита состоит из $N!$ мультииндексов, выбираем в ней представителя, такого что $m_1 > \dots > m_N$, а суммирование по $\mathfrak{S}_N$ заносим внутрь.²¹ Получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m_1, \dots, m_N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} x_1^{m_1} \dots x_N^{m_N} \det \left[\binom{l_i}{m_j} \right] &= \left\{ \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \sum_{m_1 > \dots > m_N \geq 0} x_1^{m_{\sigma(1)}} \dots x_N^{m_{\sigma(N)}} \det \left[\binom{l_i}{m_{\sigma(j)}} \right] \right\} \\ &= \sum_{m_1 > \dots > m_N \geq 0} \det \left[\binom{l_i}{m_j} \right] \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \text{sgn } \sigma \cdot x_1^{m_{\sigma(1)}} \dots x_N^{m_{\sigma(N)}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как $m_1 > \dots > m_N \geq 0$, то можно найти разбиение μ , для которого $m_j = \mu_j + N - j$. Тогда сумма по всем целым m_i , таким что $m_1 > \dots > m_N \geq 0$, превратится в сумму по всем $\mu \in \text{Part}$, таким что $\ell(\mu) \leq N$. В свою очередь сумма по σ дает нужный альтернант $a_{\mu+\delta}(x_1, \dots, x_N)$, поделив который на $V_N(x_1, \dots, x_N)$, получим (3.5), см. определение 1.6. $\square$

Теперь из биномиальной формулы и из формулы размерности (предложение 2.10) для $s_\lambda(1, \dots, 1)$, находим коэффициенты $c_\mu(\lambda)$ в (3.3):

$$c_\mu(\lambda) = \det \left[\binom{\lambda_i + N - i}{\mu_j + N - j} \right] \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{j - i}{\lambda_i - \lambda_j + j - i}. \quad (3.10)$$

²¹ Похожие рассуждения были уже в §1.1.

3.4 Стабильность многочленов Шура

Как объясняется в §3.1, мы хотим исследовать поведение нормированных лорановских многочленов Шура $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_n, 1, \dots, 1)$ (здесь количество единиц равно $N - n$, $\lambda \in \text{Sign}(N)$, $n \leq N$ фиксировано, а N растет). Для $\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N)$ уже получено разложение (3.3)–(3.10) по многочленам Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$, $\mu \in \text{Part}$, $\ell(\mu) \leq N$. В этом подразделе мы поймем, что происходит с $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ при подстановке $x_{n+1} = \dots = x_N = 0$.

Предложение 3.9. Пусть $\mu \in \text{Part}$, тогда

$$s_\mu(x_1, \dots, x_N)|_{x_N=0} = \begin{cases} s_\mu(x_1, \dots, x_{N-1}), & \text{если } \ell(\mu) \leq N-1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Доказательство. Это доказывается с помощью детерминантной формулы для многочленов Шура (1.15). Действительно, запишем

$$s_\mu(x_1, \dots, x_N)|_{x_N=0} = \frac{\det[x_j^{\mu_i+N-i}]|_{x_N=0}}{\prod_{i < j} (x_i - x_j)|_{x_N=0}}. \quad (3.12)$$

В числителе рассмотрим последний столбец матрицы, он имеет вид $(x_N^{\mu_1+N-1}, \dots, x_N^{\mu_{N-1}+1}, x_N^{\mu_N})^t$. Видно, что если $\mu_N > 0$ (то есть, $\ell(\mu) > N-1$), то этот столбец нулевой, и $s_\mu(x_1, \dots, x_N)|_{x_N=0} = 0$. Если же $\mu_N = 0$, то столбец имеет вид $(0, \dots, 0, 1)^t$. Остается заметить, что

$$\det[x_j^{\mu_i+N-i}]_{i,j=1,\dots,N-1} = x_1 \dots x_{N-1} \cdot \det[x_j^{\mu_i+(N-1)-i}]_{i,j=1,\dots,N-1} \quad (3.13)$$

и $V_N(x_1, \dots, x_N)|_{x_N=0} = x_1 \dots x_{N-1} \cdot V_{N-1}(x_1, \dots, x_{N-1})$. $\square$

3.5 Определение сдвинуто-симметрических многочленов Шура

В этом подразделе мы исследуем формулу (3.10) для коэффициентов $c_\mu(\lambda)$ разложения (3.3) и выявим в $c_\mu(\lambda)$ некоторую структуру. Пользуясь этим, мы определим *сдвинуто-симметрические многочлены Шура* (англ. shifted Schur polynomials).

Напомним, что для $\mu \in \text{Part}$ и $\lambda \in \text{Sign}(N)$ мы определяли $l_i := \lambda_i + N - i$, $m_j := \mu_j + N - j$. При этом $l_1 > \dots > l_N$, $l_i \in \mathbb{Z}$, и $m_1 > \dots > m_N \geq 0$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. В (3.10) встречались биномиальные коэффициенты вида $\binom{l}{m}$, мы знаем, что

$$\binom{l}{m} = \frac{l(l-1) \dots (l-m+1)}{m!}. \quad (3.14)$$

Поэтому введем следующее обозначение:

Определение 3.10. Убывающая факториальная степень — это $l \downarrow^m := l(l-1) \dots (l-m+1)$, если $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, и $l \downarrow^0 := 1$.²²

Это обозначение оказывается очень удобным, например, при этом $\binom{l}{m} = \frac{l \downarrow^m}{m!}$.

Теперь можно переписать (3.10), собрав в один множитель все, что зависит от λ , а во втором оставив все остальное:

$$c_\mu(\lambda) = \frac{\det[l_i^{\downarrow(\mu_j+N-j)}]}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (l_i - l_j)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (j - i)}{\prod_{j=1}^N (\mu_j + N - j)!}. \quad (3.15)$$

Первый множитель и назовем сдвинуто-симметрическим многочленом Шура:

²²Отметим, что в литературе нет единой общепринятой формы записи величин $l \downarrow^m$.

Определение 3.11. Пусть $\mu \in \text{Part}$ и $y_1, \dots, y_N$ — переменные. *Сдвинуто-симметрическим многочленом Шура* называется

$$s_\mu^*(y_1, \dots, y_N) := \frac{\det \left[y_i^{\downarrow(\mu_j + N - j)} \right]}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (y_i - y_j)}. \quad (3.16)$$

См. также упражнение 3.3.

Замечание 3.12. Второй множитель в (3.15) можно переписать в более удобном виде. Разбиения удобно представлять *диаграммами Юнга* [Мак84, Глава I, §1]. Например, на рис. 1 изображена диаграмма Юнга, соответствующая разбиению $\mu = (4, 2, 2, 1)$ (она имеет строки длины 4, 2, 2, 1). Множество всех диаграмм Юнга обозначается через $\mathbb{Y}$. Мы отождествляем $\mathbb{Y}$ с Part . Разбиения отождествляются с соответствующими диаграммами Юнга. Для любой клетки $\square \in \mu$

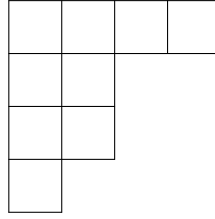


Рис. 1: Диаграмма Юнга разбиения $\mu = (4, 2, 2, 1)$.

определим ее *содержание* как

$$c(\square) := \text{номер столбца}(\square) - \text{номер строки}(\square). \quad (3.17)$$

Например, на рис. 2 в каждой клетке диаграммы $(4, 2, 2, 1)$ написано содержание этой клетки.

0	1	2	3
-1	0		
-2	-1		
-3			

Рис. 2: Содержания клеток диаграммы Юнга.

Положим

$$(z)_\mu := \prod_{\square \in \mu} (z + c(\square)), \quad (3.18)$$

где произведение идет по всем клеткам диаграммы Юнга μ .

Оказывается (упражнение 3.4), что второй множитель в (3.15) имеет вид

$$\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (j - i)}{\prod_{j=1}^N (\mu_j + N - j)!} = \frac{1}{(N)_\mu}. \quad (3.19)$$

Теперь биномиальную формулу (предложение 3.8, а также (3.3)–(3.10)) можно переписать следующим образом:

Предложение 3.13. Для любой сигнатуры $\lambda \in \text{Sign}(N)$ имеем

$$\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} \frac{s_\mu^*(\lambda_1, \dots, \lambda_N) s_\mu(x_1, \dots, x_N)}{(N)_\mu} \quad (3.20)$$

Замечание 3.14. В формуле (3.20) переменные $x_1, \dots, x_N$ уравниваются в правах с компонентами сигнатуры $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Это будет удобно для исследования поведения $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ при $N \rightarrow \infty$. Как объясняется в §3.1, мы будем исследовать асимптотическое поведение коэффициентов Тейлора, то есть величин $\frac{s_\mu^*(\lambda(N))}{(N)_\mu}$.

Таким образом, теперь у нас есть сдвинуто-симметрические многочлены Шура s_μ^* , обычные многочлены Шура s_μ ($\mu \in \text{Part}$), а также лорановские (нормированные) многочлены Шура $\tilde{s}_\lambda$ ($\lambda \in \text{Sign}(N)$). Приведем некоторые свойства сдвинуто-симметрических многочленов Шура, которые похожи на свойства обычных многочленов. Наряду с переменными y_i в $s_\mu^*(y_1, \dots, y_N)$ также удобно ввести сдвинутые переменные $\tilde{y}_i$ по формуле

$$\tilde{y} = y + \delta, \quad \delta = (N-1, N-2, \dots, 1, 0), \quad (3.21)$$

то есть, $\tilde{y}_i = y_i + N - i$.

Предложение 3.15. (1) Выражение $s_\mu^*(y_1, \dots, y_N)$ является симметричным по $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$;
(2) $s_\mu^*(y)$ является многочленом от $y_1, \dots, y_N$ (или, что эквивалентно, от $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$);
(3) (стабильность) Сдвинуто-симметрические многочлены Шура s_μ^* стабильны в том же смысле, что и обычные многочлены Шура s_μ :

$$s_\mu^*(y_1, \dots, y_N)|_{y_N=0} = \begin{cases} s_\mu^*(y_1, \dots, y_{N-1}), & \text{если } \ell(\mu) \leq N-1; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Доказательство. Упражнение 3.5. □

3.6 Алгебры симметрических и сдвинуто-симметрических функций

В данном подразделе мы введем необходимый формализм, касающийся алгебр симметрических и сдвинуто-симметрических функций. Он оказывается полезным во многих ситуациях, его применение не ограничивается рамками данных лекций.

Сначала опишем алгебру симметрических функций (см., например, [Мак84, Глава I, §2]). Напомним (определение 3.4), что через $\Lambda(N)$ мы обозначаем алгебру симметрических многочленов от N переменных $x_1, \dots, x_N$, то есть, $\Lambda(N) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$. Это многочлены в традиционном смысле, а не многочлены Лорана. Алгебра $\Lambda(N)$ является $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированной.²³

Определение 3.16. Алгебра симметрических функций Λ — это проективный предел алгебр $\Lambda(N)$ (обозначается $\Lambda = \varprojlim \Lambda(N)$) в категории градуированных алгебр относительно проекций $\Lambda(N) \rightarrow \Lambda(N-1)$, состоящих в специализации $x_N = 0$.

Другими словами, каждый элемент $f \in \Lambda$ представляет собой последовательность $f = (f_N)$, где

- $f_N \in \Lambda(N)$;
- $f_N|_{x_N=0} = f_{N-1}$;
- $\sup_N \deg f_N < \infty$.

²³Понятие $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры дано в определении 1.1, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированная алгебра определяется аналогично.

Первые два пункта разъясняют смысл понятия «проективный предел», третий пункт показывает, что этот предел берется именно в категории градуированных алгебр, а не просто алгебр. Другими словами, для фиксированного k можно рассмотреть ограничение проекций $\Lambda(N) \rightarrow \Lambda(N-1)$ на $\Lambda_{\deg=k}(N)$, мы получим линейные преобразования $\Lambda_{\deg=k}(N) \rightarrow \Lambda_{\deg=k}(N-1)$. Взяв проективный предел пространств $\Lambda_{\deg=k}(N)$, мы получим $\Lambda_{\deg=k}$ — однородную компоненту степени k в алгебре Λ . Таким образом, алгебра Λ наделяется структурой $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ -градуированной алгебры.

Замечание 3.17. Алгебру симметрических функций Λ можно действительно рассматривать как алгебру функций от бесконечного числа переменных. А именно, как функции на пространстве $\mathbb{C}_{\text{fin}}^\infty$, состоящем из последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, в которых лишь конечное число компонент отлично от нуля. Действительно, для любого $x \in \mathbb{C}_{\text{fin}}^\infty$ найдется номер N , такой что $x = (x_1, \dots, x_N, 0, 0, \dots)$, и тогда значение элемента $f = (f_N) \in \Lambda$ на x полагаем равным $f_N(x_1, \dots, x_N)$.

Определение 3.18. Можно рассматривать симметрические функции Шура $s_\mu \in \Lambda$, где $\mu \in \text{Part}$. Это следует из стабильности многочленов Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ (предложение 3.9), а также из того, что каждый многочлен Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ (где $N \geq \ell(\mu)$) является однородным степени $|\mu|$.²⁴

Теперь перейдем к определению алгебры сдвинуто-симметрических функций.

Определение 3.19. Алгебра сдвинуто-симметрических многочленов от переменных $y_1, \dots, y_N$ состоит из всех многочленов от $y_1, \dots, y_N$, инвариантных относительно сдвинутого действия группы $\mathfrak{S}_N$. Обозначение

$$\Lambda^*(N) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\ast \mathfrak{S}_N}, \quad (3.23)$$

где $\ast \mathfrak{S}_N$ и есть сдвинутое действие, которое определяется следующим образом. В отличие от обычного действия (перестановки координат $y_1, \dots, y_N$), действие $\ast \mathfrak{S}_N$ переставляет координаты $\tilde{y}_i = y_i + N - i$, если многочлен от $y_1, \dots, y_N$ рассматривать как многочлен от $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$. Другими словами, для любой перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ ее сдвинутое действие в координатах y записывается так:

$$\ast \sigma(y) = \sigma(y + \delta) - \delta, \quad y = (y_1, \dots, y_N), \quad \delta = (N-1, N-2, \dots, 0), \quad (3.24)$$

где $\sigma(y + \delta)$ — перестановка координат (обычное действие элемента $\sigma \in \mathfrak{S}_N$).

Отметим, что обычное действие группы $\mathfrak{S}_N$ на $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$ перестановками координат сохраняет однородные многочлены в $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$. Поэтому алгебру симметрических многочленов $\Lambda(N) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\mathfrak{S}_N}$ естественно наделять структурой градуированной алгебры. Сдвинутое действие $\ast \mathfrak{S}_N$ на $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$, определенное выше, уже не сохраняет однородные многочлены. Однако, оно не повышает степени многочленов, поэтому алгебру $\Lambda^*(N) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]^{\ast \mathfrak{S}_N}$ можно наделять структурой фильтрованной алгебры:

Определение 3.20. Алгебра A называется *фильтрованной*, если в A выделена последовательность вложенных друг в друга подпространств $\{0\} \subset A_{\leq 0} \subset A_{\leq 1} \subset \dots \subset A$, так что $A = \bigcup_{i=0}^\infty A_{\leq i}$ и для всех m, n выполнено $A_{\leq m} \cdot A_{\leq n} \subseteq A_{\leq (m+n)}$. Говорят, что $A_{\leq m}$ — пространство элементов A , имеющих степень не выше m .

Рассмотрим проективный предел алгебр $\Lambda^*(N)$ в категории фильтрованных алгебр относительно проекций $\Lambda^*(N) \rightarrow \Lambda^*(N-1)$, состоящих в специализации $y_N = 0$ (см. также упражнение 3.6). Мы получим следующий объект:

²⁴Формально говоря, функция Шура $s_\mu \in \Lambda$ — это последовательность многочленов Шура $s_\mu(x_1, \dots, x_N)$ от N переменных. Она удовлетворяет всем трем свойствам, перечисленным в определении 3.16.

Определение 3.21. Алгебра сдвинуто-симметрических функций Λ^* состоит из последовательностей $g = (g_N)$, для которых

- $g_N \in \Lambda^*(N)$;
- $g_N|_{y_N=0} = g_{N-1}$;
- $\sup_N \deg g_N < \infty$.

Определение 3.22. Пусть A — некоторая фильтрованная алгебра. Присоединенная градуированная алгебра $\text{gr}A$ определяется как

$$\text{gr}A := \bigoplus_{k=1}^{\infty} A_{\deg \leq k} / A_{\deg \leq (k-1)}. \quad (3.25)$$

Предложение 3.23. Присоединенная градуированная алгебра $\text{gr}\Lambda^*$ канонически изоморфна алгебре Λ .

Доказательство. Упражнение 3.7. □

Замечание 3.24. Так же, как в замечании 3.17 об алгебре Λ , элементы алгебры сдвинуто-симметрических функций Λ^* можно рассматривать как настоящие функции на $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$.

Определение 3.25. Сдвинуто-симметрические функции Шура $s_{\mu}^* \in \Lambda^*$ определяются как «пределы» сдвинуто-симметрических многочленов Шура $s_{\mu}^*(y_1, \dots, y_N)$ аналогично определению 3.18.

Замечание 3.26. Для всех $\mu \in \text{Part}$ старшей однородной компонентой сдвинуто-симметрической функции Шура $s_{\mu}^* \in \Lambda^*$ является функция Шура $s_{\mu} \in \Lambda$. Поясним это утверждение. Пусть $|\mu| = k$. Наше утверждение означает, что при каноническом гомоморфизме

$$\Lambda_{\deg \leq k}^* \rightarrow \Lambda_{\deg \leq k}^* / \Lambda_{\deg \leq (k-1)}^* \quad (3.26)$$

функция $s_{\mu}^* \in \Lambda_{\deg \leq k}^*$ переходит в функцию $s_{\mu} \in \Lambda_{\deg = k}$ (напомним, что $\Lambda_{\deg = k}$ изоморфно $\Lambda_{\deg \leq k}^* / \Lambda_{\deg \leq (k-1)}^*$, см. упражнение 3.7).

Предложение 3.27. (1) Функции Шура $s_{\mu} \in \Lambda$ (где μ пробегает все разбиения) образуют базис в алгебре Λ ;

(2) Сдвинуто-симметрические функции Шура $s_{\mu}^* \in \Lambda^*$ (где μ пробегает все разбиения) образуют базис в алгебре Λ^* . Кроме того, он согласован с фильтрацией в Λ^* , то есть, для любого k , совокупность тех функций s_{μ}^* , которые попадают в $\Lambda_{\deg \leq k}^*$, образует базис в $\Lambda_{\deg \leq k}^*$.

Доказательство. Утверждение (1) можно доказать, пользуясь определением алгебры Λ как проективного предела (определение 3.16). Утверждение (2) следует из утверждения (1) и замечания 3.26. □

Замечание 3.28. Алгебру сдвинуто-симметрических функций Λ^* можно рассматривать как своего рода деформацию алгебры симметрических функций Λ . А именно, можно рассмотреть целое семейство алгебр $\Lambda^{(h)}$ (здесь $h \in \mathbb{R}$ — параметр деформации) *h-сдвинуто-симметрических функций*. Каждая алгебра $\Lambda^{(h)}$ получается как проективный предел алгебр *h-сдвинуто-симметрических* многочленов (то растущего числа переменных), то есть, алгебр многочленов от переменных $y_1, \dots, y_N$, которые инвариантны относительно *h-действия* группы $\mathfrak{S}_N$, которое заключается в перестановке переменных $\tilde{y}_i^{(h)} := y_i - h \cdot i + \text{Const}$. Если $h = 0$, то $\Lambda^{(0)}$ — обычная алгебра симметрических функций, а если $h = 1$, то мы получаем алгебру сдвинуто-симметрических функций Λ^* . С другой стороны, для любого $h \neq 0$ алгебра $\Lambda^{(h)}$ изоморфна алгебре Λ^* (достаточно сделать замену переменных $y_i \mapsto \frac{y_i}{h}$). Таким образом, можно сказать, что алгебра Λ^* есть деформация алгебры Λ .

Пример 3.29 (Суммы Ньютона). В заключение приведем один пример. Как известно, одним из семейств образующих алгебры Λ являются суммы Ньютона $p_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, $k = 1, 2, \dots$ (если рассматривать симметрические функции на $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$, то эти суммы фактически будут конечными). Попробуем найти их аналог в алгебре Λ^* . Хотелось бы взять функции вида $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - i)^k$, однако ясно, что на $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$ эти суммы расходятся. Поэтому нам необходимо компенсировать эту расходимость. Положим

$$p_k^*(x) := \sum_{i=1}^{\infty} [(x_i - i)^k - (-i)^k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Ясно, что эти равенства корректно определяют функции на $\mathbb{C}_{\text{fin}}^{\infty}$, и кроме того, они определяют сдвинуто-симметрические функции $p_k^* \in \Lambda^*$. Также ясно, что для всех $k = 1, 2, \dots$ старшей однородной компонентой функции $p_k^* \in \Lambda^*$ (в смысле замечания 3.26) является $p_k \in \Lambda$.

Заменяя i на $h \cdot i$ ($h \in \mathbb{R}$) в определении p_k^* , мы получим функции, которые естественно называть деформациями сумм Ньютона.²⁵

3.7 Упражнения

Упражнение 3.1. Докажите предложение 3.5.

Упражнение 3.2. Выведите из биномиальной формулы (предложение 3.8) формулу размерности (предложение 2.10).

Упражнение 3.3. Покажите, что сдвинуто-симметрический многочлен Шура $s_{\mu}^*(y_1, \dots, y_N)$ (определение 3.11) действительно является многочленом по $y_1, \dots, y_N$.

Указание. Это доказывается также, как предложение 1.5.

Упражнение 3.4. Докажите формулу (3.19).

Упражнение 3.5. Докажите предложение 3.15.

Указание. Свойство (1) следует из определения сдвинуто-симметрических многочленов Шура (определение 3.11). Свойство (2) — из упражнения 3.3. Свойство стабильности сдвинуто-симметрических многочленов Шура (свойство (3)) можно доказать точно так же, как стабильность обычных многочленов Шура (предложение 3.9).

Упражнение 3.6. Покажите, что для любого сдвинуто-симметрического многочлена $g(y_1, \dots, y_N)$ из $\Lambda^*(N)$ (см. определение 3.19) многочлен $g(y_1, \dots, y_N)|_{y_N=0}$ является сдвинуто-симметрическим по переменным $y_1, \dots, y_{N-1}$. Это позволяет нам рассматривать проекции $\Lambda^*(N) \rightarrow \Lambda^*(N-1)$, используемые для определения алгебры сдвинуто-симметрических функций (см. §3.6).

Упражнение 3.7. Докажите предложение 3.23, то есть, покажите, что для всех $k = 1, 2, \dots$ существует канонический изоморфизм

$$\Lambda_{\deg \leq k}^* / \Lambda_{\deg \leq (k-1)}^* \cong \Lambda_{\deg=k}. \quad (3.28)$$

Для доказательства последнего факта используйте конструкцию проективного предела.

Упражнение 3.8. Пользуясь определениями §3.6, проверьте утверждения замечания 3.26.

Упражнение 3.9. Завершите доказательство предложения 3.27.

²⁵Существуют и другие варианты аналогов сумм Ньютона. Каждый из них имеет свои достоинства, а наиболее предпочтительного варианта, по-видимому, указать нельзя.

4 Сдвинуто-симметрические функции Шура (продолжение)

4.1 Инфинитезимально-регулярные последовательности сигнатур

Напомним (§3.6), что мы ввели градуированную алгебру симметрических функций Λ с базисом из симметрических функций Шура $\{s_\mu\}$, где μ пробегает все разбиения. Также в §3.6 мы определили алгебру сдвинуто-симметрических функций Λ^* с базисом из сдвинуто-симметрических функций Шура $\{s_\mu^*\}$, где μ также пробегает все разбиения. Напомним, что для нормированных лорановских многочленов Шура было получено разложение (3.20):

$$\tilde{s}_\lambda(1 + x_1, \dots, 1 + x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} \frac{s_\mu^*(\lambda) s_\mu(x)}{(N)_\mu}. \quad (4.1)$$

Здесь λ — сигнатура длины N . Величина $(N)_\mu$ определяется по формуле (3.18). Отметим, что

$$(N)_\mu \sim N^{|\mu|}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

Для наших целей этой эквивалентности будет достаточно.

В §3.1 была высказана идея, что для доказательства теоремы Войкулеску (теорема 2.21) надо сначала рассмотреть ее инфинитезимальный вариант, то есть, найти все последовательности сигнатур $\lambda(N)$, для которых коэффициенты при $s_\mu(x)$ в (4.1) имеют пределы. Эта идея вместе с эквивалентностью (4.2) приводит к следующему определению:

Определение 4.1. Последовательность сигнатур $\lambda(N)$ (где $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$, то есть сигнатура длины N) называется *инфинитезимально-регулярной*, если для каждого фиксированного разбиения μ величины

$$\frac{s_\mu^*(\lambda(N))}{N^{|\mu|}} \quad (4.3)$$

имеют предел при $N \rightarrow \infty$.

Мы знаем, что $\{s_\mu^*\}$ — базис в Λ^* , согласованный с фильтрацией (предложение 3.27), поэтому свойство инфинитезимально-регулярности можно переформулировать следующим образом.

Выберем любую однородную симметрическую функцию $F \in \Lambda$ степени $k \geq 1$ (мы пишем $F \in \Lambda_{\deg=k}$). «Поднимем» F в алгебру Λ^* , то есть, возьмем какую-нибудь сдвинуто-симметрическую функцию $F^* \in \Lambda_{\deg \leq k}^*$, старшей однородной компонентой которой является F (см. замечание 3.26). Величины

$$\frac{F^*(\lambda(N))}{N^k} \quad (4.4)$$

имеют предел при $N \rightarrow \infty$ для всех $F \in \Lambda_{\deg=k}$ и для всех $k = 1, 2, \dots$ тогда и только тогда, когда $\{\lambda(N)\}$ — инфинитезимально-регулярная последовательность сигнатур. Нетрудно проверить (упражнение 4.1), что предел (4.4) не зависит от выбора F^* , а зависит только от самой функции F . Таким образом, для инфинитезимально-регулярной последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$ можно определить функционал $\psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$, для которого

$$\frac{F^*(\lambda(N))}{N^k} \rightarrow \psi(F), \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.5)$$

При этом ψ , разумеется, зависит от последовательности $\{\lambda(N)\}$. Функционал ψ , кроме того, что является линейным на Λ , еще и обладает свойством мультипликативности, то есть $\psi(F_1 F_2) = \psi(F_1) \psi(F_2)$. Именно это свойство позволяет перейти к однородным образующим в алгебре Λ . Сформулируем это важное соображение в виде предложения:

Предложение 4.2. Пусть $f_1, f_2, \dots \in \Lambda$ — однородные элементы алгебры Λ , $\deg f_k = k$, и алгебра Λ порождена элементами f_k как коммутативная алгебра с единицей.²⁶ Пусть $f_k^* \in \Lambda_{\deg \leq k}^*$ — сдвинуто-симметрические функции, такие, что старшая однородная компонента элемента f_k^* есть f_k для всех k .

Последовательность сигнатур $\{\lambda(N)\}$ (где $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$) является инфинитезимально-регулярной (определение 4.1) тогда и только тогда, когда для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует предел (зависящий от $\{\lambda(N)\}$), такой, что

$$\frac{f_k^*(\lambda(N))}{N^k} \rightarrow \psi_k, \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

(Тогда мультипликативный функционал (4.5) определяется условием $\psi(f_k) = \psi_k$.) В следующем подразделе мы рассмотрим хорошо известные системы однородных образующих алгебры Λ .

4.2 Однородные образующие в алгебре Λ и их сдвинуто-симметрические аналоги

Сначала рассмотрим однородные образующие в Λ . Этот материал можно найти, напр., в [Мак84, Глава I, §2].

Определение 4.3. Суммы Ньютона $p_k \in \Lambda$, полные симметрические функции²⁷ $h_k \in \Lambda$ и элементарные симметрические функции $e_k \in \Lambda$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_k(x_1, x_2, \dots) &:= \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k; \\ h_k(x_1, x_2, \dots) &:= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}; \\ e_k(x_1, x_2, \dots) &:= \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $k = 1, 2, \dots$. Часто удобно считать, что $h_0 = e_0 := 1$. Отметим, что надобности определить каким-либо образом p_0 не возникает.

Замечание 4.4. Эти определения можно понимать двумя способами. Поясним это на примере функций h_k :

- Согласно определению 3.16, элемент $h_k \in \Lambda$ — это последовательность многочленов $h_k(x_1, \dots, x_N)$ из $\Lambda(N)$, $N = 1, 2, \dots$. Таким образом, положив $x_{N+1} = x_{N+2} = \dots = 0$ в (4.7), мы получим обычные симметрические многочлены от $x_1, \dots, x_N$;
- Функции (4.7) можно рассматривать как элементы из $\mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots]]$, то есть, как формальные степенные ряды от бесконечного числа переменных $x_1, x_2, \dots$. Также можно считать, что и вся алгебра Λ вложена в $\mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots]]$.

Все три системы функций $\{p_1, p_2, \dots\}$, $\{h_1, h_2, \dots\}$, $\{e_1, e_2, \dots\}$ являются системами однородных образующих алгебры Λ . Определим производящие функции для этих наборов:

²⁶В этом случае мы говорим, что $\{f_1, f_2, \dots\}$ — система однородных образующих алгебры Λ .

²⁷Мы уже встречались с полными однородными симметрическими многочленами, но теперь слово «однородный» в названии h_k мы будем для краткости опускать.

Определение 4.5. Пусть t — формальная переменная, положим

$$\begin{aligned} P(t) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k t^k}{k}; \\ H(t) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k; \\ E(t) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} e_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} e_k t^k. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Определение производящей функции $P(t)$ не вполне стандартно ввиду множителей k в знаменателе, но оно оказывается удобным.

Приведем важные свойства этих производящих функций.

Предложение 4.6. Функции $H(t)$ и $E(t)$ могут быть выражены через $x_1, x_2, \dots$:

$$H(t) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x_i t}, \quad E(t) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x_i t). \quad (4.9)$$

Есть соотношения, которые связывают три системы однородных образующих алгебры Λ ($\{p_k\}$, $\{h_k\}$ и $\{e_k\}$) между собой:

$$H(t)E(-t) = 1, \quad H(t) = e^{P(t)}. \quad (4.10)$$

Доказательство. Упражнение 4.2. □

Теперь перейдем к факториальным аналогам однородных образующих, как подсказывает предложение 4.2. Для функций p_k нет канонических сдвинуто-симметрических аналогов,²⁸ а для h_k и e_k есть. Нам будет удобнее работать с функциями h_k , однако, с тем же успехом можно было бы использовать и e_k . До некоторого момента мы будем работать с h_k и e_k параллельно, затем сосредоточимся на h_k .

Определение 4.7. Полные сдвинуто-симметрические функции $h_k^* \in \Lambda^*$ и элементарные сдвинуто-симметрические функции $e_k^* \in \Lambda^*$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} h_k^*(y_1, y_2, \dots) &:= \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} (y_{i_1} - k + 1) \dots (y_{i_{k-1}} - 1) y_{i_k}; \\ e_k^*(y_1, y_2, \dots) &:= \sum_{i_1 < \dots < i_k} (y_{i_1} + k - 1) \dots (y_{i_{k-1}} + 1) y_{i_k}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь $k = 1, 2, \dots$. Удобно также положить $h_0^* = e_0^* := 1$.

Замечание 4.8. Из этого определения сразу видна стабильность h_k^* и e_k^* (в смысле предложения 3.15 (3)), так как мы всегда полагаем равными нулю переменные y_i с наибольшим номером, а в силу ограничений $i_1 \leq \dots \leq i_k$ (соответственно, $i_1 < \dots < i_k$) эти нулевые переменные могут стоять только на последнем месте в мономе $(y_{i_1} - k + 1) \dots (y_{i_{k-1}} - 1) y_{i_k}$ (соответственно, $(y_{i_1} + k - 1) \dots (y_{i_{k-1}} + 1) y_{i_k}$). Однако, свойства сдвинуто-симметричности функций h_k^* и e_k^* из определения не видно (упражнение 4.3).

Можно пояснить, почему мы считаем h_k^* и e_k^* из определения 4.7 каноническими аналогами h_k и e_k . Оказывается,²⁹ что

$$h_k^* = s_{(k)}^*, \quad e_k^* = s_{(1^k)}^*, \quad (4.12)$$

где $k = 1, 2, \dots$, s_{μ}^* — сдвинуто-симметрические функции Шура, (k) и $(1^k) = \underbrace{(1, \dots, 1)}_k$ — разбиения (ср. это с предложением 2.14, которое утверждает, что $s_{(k)} = h_k$ и $s_{(1^k)} = e_k$).

²⁸См. также пример 3.29.

²⁹Упражнение 4.4.

4.3 Производящие функции для h_k^* и e_k^*

Начнем с одного общего замечания.

Замечание 4.9. В алгебре Λ^* формальные степенные ряды следует рассматривать по степеням обратной переменной v^{-1} , в отличие от алгебры Λ , где мы рассматривали ряды по степеням t (определение 4.5, предложение 4.6). Это связано с тем, что в рядах по переменной t нельзя сделать замену $t \rightarrow t + c$ ($c \neq 0$), эта операция не определена. В то же время в рядах по v^{-1} замена $v \rightarrow v + c$ вполне допустима.³⁰ А именно, рассмотрим ряд

$$\Phi(v) := \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{v} + \frac{\varphi_2}{v^2} + \dots \quad (4.13)$$

Пусть $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ — последовательность сдвижек, $\varepsilon_i \in \mathbb{C}$. Ряд $\Phi(v)$ можно переразложить следующим образом:

$$\Phi(v) = \tilde{\varphi}_0 + \frac{\tilde{\varphi}_1}{v - \varepsilon_1} + \frac{\tilde{\varphi}_2}{(v - \varepsilon_1)(v - \varepsilon_2)} + \dots, \quad (4.14)$$

это приведет к линейной треугольной замене коэффициентов $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots) \rightarrow (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \dots)$.

Определение 4.10. Производящими функциями сдвинуто-симметрических функций h_k^* и e_k^* соответственно называются следующие формальные степенные ряды по переменной v^{-1} :

$$\begin{aligned} H^*(v) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^*}{v(v-1)\dots(v-k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*}{v^{\downarrow k}}; \\ E^*(v) &:= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k^*}{v(v-1)\dots(v-k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_k^*}{v^{\downarrow k}}; \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь $v^{\downarrow k}$ — убывающие факториальные степени, см. определение 3.10.

Приведем без доказательства формулы для производящих функций $H^*(v)$ и $E^*(v)$, похожие на формулы (4.9).

Предложение 4.11.

$$H^*(v) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{v+i}{v-y_i+i}, \quad E^*(v) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{v+y_i-i+1}{v-i+1}. \quad (4.16)$$

Замечание 4.12. (1) Из формул (4.16) уже видна сдвинуто-симметричность функций h_k^* и e_k^* (упражнение 4.3).

(2) Производящие функции $H^*(v)$ и $E^*(v)$ являются элементами алгебры $\mathbb{C}[[y_1, y_2, \dots; \frac{1}{v}]]$. Это можно увидеть двумя способами:

- С одной стороны, можно ограничиться переменными $y_1, \dots, y_N$ (полагая $y_{N+1} = y_{N+2} = \dots = 0$), тогда произведения в правых частях (4.16) станут рациональными функциями от v , и их можно разложить в $v = \infty$. Для их коэффициентов будет выполняться свойство стабильности по N ;
- С другой стороны, можно поделить числитель и знаменатель каждого из сомножителей в правых частях (4.16) на v , и сразу рассматривать эти правые части как элементы алгебры $\mathbb{C}[[y_1, y_2, \dots; \frac{1}{v}]]$.

Замечание 4.13. Из (4.16) следует, что $H^*(v)E^*(-v-1) = 1$. Это равенство можно рассматривать как деформацию соответствующего соотношения $H(t)E(-t) = 1$ (предложение 4.6) в духе замечания 3.28 — вводя параметр h , будем иметь для $h \neq 0$ равенства $H^*(v)E^*(-v-h) = 0$, и при $h \rightarrow 0$ придем к $H(t)E(-t) = 1$.

³⁰Можно мыслить ряды по переменной t как ряды Тейлора в точке 0, а по переменной v^{-1} — как ряды в $v = \infty$. Ясно, что замена $v \rightarrow v + c$ в окрестности $v = \infty$ представляет собой почти тождественное преобразование.

4.4 Инфинитезимальная регулярность и степенные ряды

Конкретизируя предложение 4.2, можно сказать, что последовательность сигнатур $\{\lambda(N)\}$ инфинитезимально-регулярна тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\frac{h_k^*(\lambda(N))}{N^k} \rightarrow \psi_k, \quad N \rightarrow \infty \quad (4.17)$$

для всех $k = 1, 2, \dots$.

Вместо доказательства указанной сходимости нам бы хотелось рассматривать производящие функции числовых последовательностей $\frac{h_k^*(\lambda(N))}{N^k}$ и ψ_k по степеням v^{-1} и доказывать уже сходимость последовательности степенных рядов к предельному степенному ряду. Мы приведем этой определение последней сходимости и общую лемму, которая будет далее использоваться.

Определение 4.14. Будем говорить, что последовательность формальных степенных рядов $\Phi^{(N)}(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^{(N)} v^{-k}$ сходится к формальному степенному ряду $\Phi(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k v^{-k}$, если сходятся коэффициенты при всех степенях v^{-1} , то есть, $\varphi_k^{(N)} \rightarrow \varphi_k$ при $N \rightarrow \infty$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

Лемма 4.15. Пусть $\varphi_k^{(N)}, \varphi_k$ ($k, N \in \mathbb{Z}_{>0}$) — числа. Пусть $\varepsilon_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \dots$ — последовательность сдвижек (фиксированная, не зависящая от N). Построим ряды со сдвижками:

$$\Phi^{(N)}(v) := \varphi_0^{(N)} + \frac{\varphi_1^{(N)}}{v_1 - \varepsilon_1} + \frac{\varphi_2^{(N)}}{(v - \varepsilon_1)(v - \varepsilon_2)} + \dots, \quad (4.18)$$

и также пусть $\Phi(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k v^{-k}$.

Тогда

$$\frac{\varphi_k^{(N)}}{N^k} \rightarrow \varphi_k, \quad N \rightarrow \infty \quad (4.19)$$

для всех $k = 1, 2, \dots$ тогда и только тогда, когда выполнена сходимость степенных рядов

$$\Phi^{(N)}(Nv) \rightarrow \Phi(v), \quad N \rightarrow \infty \quad (4.20)$$

(в смысле определения 4.14).

Доказательство. Упражнение 4.5) □

В следующем подразделе мы займемся сходимостью последовательностей производящих рядов в случае, когда все сигнатуры $\lambda(N)$ неотрицательны (то есть, $\lambda(N) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N$). В этом случае мы будем трактовать $\lambda(N)$ как разбиения длины не больше N и изображать их диаграммами Юнга (см. замечание 3.12). Общий случай будем рассматривать в следующей лекции, а сейчас сделаем одно замечание:

Замечание 4.16 (Об общих сигнатурах). Общую (не обязательно неотрицательную) сигнатуру λ длины N будем представлять как пару диаграмм Юнга λ^+ и λ^- с дополнительным условием $\ell(\lambda^+) + \ell(\lambda^-) \leq N$. Проще всего это описать на примере. Пусть $\lambda = (3, 3, 1, 0, -2, -4)$, $N = 6$, тогда $\lambda^+ = (3, 3, 1)$ и $\lambda^- = (4, 2)$, см. рис. 3. Диаграмма λ^+ ориентирована привычно, а диаграмма λ^- повернута на 180° .

4.5 Координаты Фробениуса и инфинитезимально-регулярные последовательности неотрицательных сигнатур

Займемся описанием инфинитезимально-регулярных последовательностей неотрицательных сигнатур.

Идея состоит в переходе к координатам Фробениуса диаграммы Юнга (которые будут рассматриваться вместо длин ее строк).

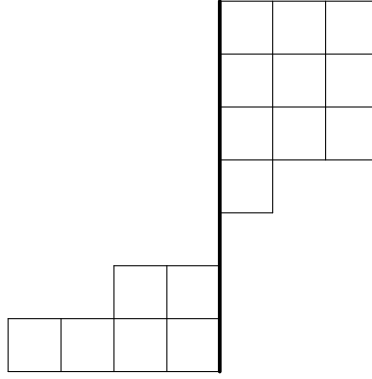


Рис. 3: Представление сигнатуры $\lambda = (3, 3, 1, 0, -2, -4)$ в виде пары диаграмм Юнга $\lambda^+ = (3, 3, 1)$ и $\lambda^- = (4, 2)$.

Определение 4.17. Пусть λ — диаграмма Юнга. Пусть $d = d(\lambda)$ — число клеток на диагонали диаграммы λ . Положим

$$a_i := \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \quad b_i := \lambda'_i - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, d. \quad (4.21)$$

Здесь λ' — транспонированная диаграмма Юнга (отраженная относительно главной диагонали). Числа $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ называются *модифицированными координатами Фробениуса* диаграммы λ .

Замечание 4.18. Модифицированные координаты Фробениуса были введены Вершиком и Керовым. Они отличаются от классических координат Фробениуса (см., напр., [Мак84]) добавлением $\frac{1}{2}$. Важная роль этих добавок выясняется при дальнейшем развитии теории. Классические координаты Фробениуса нам не понадобятся, поэтому прилагательное «модифицированные» мы будем опускать.

Ясно, что $\sum_{i=1}^d (a_i + b_i) = |\lambda|$, а также что транспозиция диаграммы λ отвечает замене $a_i \leftrightarrow b_i$. Также отметим, что $a_1 > a_2 > \dots > a_d > 0$ и $b_1 > b_2 > \dots > b_d > 0$.

Пример 4.19. Для $\lambda = (3, 3, 1)$ имеем $d = 2$, $a_1 = \frac{5}{2}$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $b_1 = \frac{5}{1}$, $b_2 = \frac{1}{2}$, см. рис. 4. Видно, что координаты Фробениуса равны площадям соответствующих трапеций. На рис. 4 эти

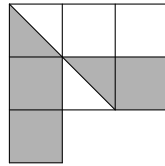


Рис. 4: Координаты Фробениуса как площади трапеций.

трапеции закрашены для a_2 («горизонтальная») и для b_1 («вертикальная»).

Сейчас мы увидим, что в терминах координат Фробениуса производящая функция (4.15) приобретает замечательно простой вид. Для начала сделаем сдвигку аргумента, $v \rightarrow v - \frac{1}{2}$, что не повлияет на асимптотическое поведение (так как аргумент v затем будет умножаться на N).

Предложение 4.20. Для любой диаграммы Юнга λ ,

$$H^*(v - \frac{1}{2}; \lambda) = \prod_{i=1}^d \frac{v + b_i}{v - a_i}, \quad (4.22)$$

где $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ — координаты Фробениуса диаграммы λ .

Замечание 4.21. Ряд

$$H^*(v - \frac{1}{2}; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*(\lambda)}{(v - \frac{1}{2})^{\downarrow k}}. \quad (4.23)$$

является сдвинуто-симметрической функцией от длин строк $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ диаграммы λ , тогда как в правой части (4.22) стоит *суперсимметрическая* функция от координат Фробениуса $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ диаграммы λ .³¹ Это пример того, как суперсимметрия возникает из диаграмм Юнга и симметрических функций.

Предложение 4.20 можно доказать, используя так называемую лемму Фробениуса, см. [Мак84, гл. I, (1.7)] (Макдональд это название не употребляет). Мы приведем несколько иное рассуждение, хотя по существу оно эквивалентно лемме Фробениуса.

Доказательство. Надо показать, что для всех $\lambda \in \mathbb{Y}$,

$$\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{v + i - \frac{1}{2}}{v - \lambda_i + i - \frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^d \frac{v + b_i}{v - a_i}. \quad (4.24)$$

Сопоставим каждой диаграмме Юнга λ полубесконечную влево конфигурацию точек

$$X(\lambda) = \{\lambda_i - i + \frac{1}{2}\}_{i=1,2,\dots} \subset \mathbb{Z}' := \mathbb{Z} + \frac{1}{2}. \quad (4.25)$$

Разделим полуцелые числа $\mathbb{Z}'$ на положительные и отрицательные, $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}'_+ \sqcup \mathbb{Z}'_-$. Покажем, что

$$X(\lambda) \cap \mathbb{Z}'_+ = \{a_1, \dots, a_d\}, \quad \mathbb{Z}' \setminus X(\lambda) = \{-b_1, \dots, -b_d\}, \quad (4.26)$$

где $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ — координаты Фробениуса диаграммы λ .

Пусть $\lambda = (3, 3, 1)$. На рис. 5 изображена конфигурация точек $X(\lambda) \subset \mathbb{Z}'$. Таким образом,

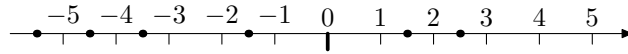


Рис. 5: Конфигурация $X(\lambda)$ для $\lambda = (3, 3, 1)$.

(4.26) утверждает, что если в конфигурации $X(\lambda)$ взять «частицы» справа от нуля и «дырки» слева, то получим как раз координаты Фробениуса $\{a_1, \dots, a_d\}$ и $\{-b_1, \dots, -b_d\}$. Это можно увидеть, если наложить числовую ось вдоль границы диаграммы Юнга, как показано на рисунке 6, и на каждом вертикальном отрезке получившейся «изломанной» оси расположить частицу (упражнение 4.6).

Итак, (4.26) установлено. Отметим, что $X(\emptyset) = \{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \dots\}$, поэтому левую часть (4.24) можно записать как

$$\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{v + i - \frac{1}{2}}{v - \lambda_i + i - \frac{1}{2}} = \frac{\prod_{x \in X(\emptyset)} (v - x)}{\prod_{x \in X(\lambda)} (v - x)}. \quad (4.27)$$

³¹То есть, правая часть (4.22) симметрична по каждому из наборов $a_1, \dots, a_d$ и $b_1, \dots, b_d$, а также выполнено дополнительное свойство: если для всех $i, j = 1, \dots, d$ положить $a_i = -b_i = t$, то результат этой подстановки не будет зависеть от t .

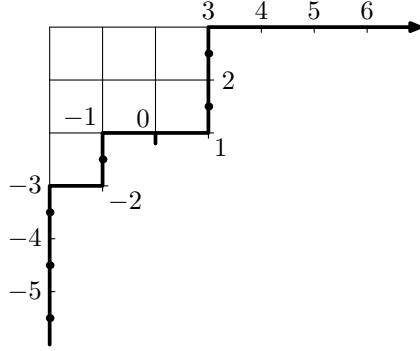


Рис. 6: К доказательству (4.26).

Видно, что почти все множители в числителе и знаменателе сокращаются, кроме конечного числа, и в результате с помощью (4.26) получается то, что требовалось. $\square$

Замечание 4.22. Соответствие (4.25) играет фундаментальную роль, поскольку позволяет трактовать случайные разбиения как точечные случайные процессы.

Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность неотрицательных сигнатур. Из предложения 4.20 получаем, что

$$H^*(N(v - \frac{1}{2}); \lambda(N)) = \prod_{i=1}^{d(N)} \frac{v + \frac{b_i(N)}{N}}{v - \frac{a_i(N)}{N}}, \quad (4.28)$$

где $(a_1(N), \dots, a_{d(N)}(N) \mid b_1(N), \dots, b_{d(N)}(N))$ — координаты Фробениуса диаграммы $\lambda(N)$. В силу предложения 4.11 и леммы 4.15, инфинитезимальная регулярность последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$ пересказывается теперь как сходимость в $\mathbb{C}[[v^{-1}]]$ правых частей формулы (4.28).

Как мы увидим в дальнейшем, для этого необходимо и достаточно существования пределов

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_i(N)}{N} = \alpha_i, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_i(N)}{N} = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.29)$$

(при этом величина $d(N)$ может как стремиться к бесконечности, так и быть ограниченной), а также предела

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\lambda(N)|}{N} = \delta. \quad (4.30)$$

Пример 4.23. Число γ не обязано быть нулем, например, можно рассмотреть последовательность $\lambda(N)$ диаграмм Юнга, которые представляют собой квадраты со стороной (примерно) $\sqrt{N}$. Тогда ясно, что все α_i и β_i равны нулю, а при этом $\gamma = 1$.

Замечание 4.24. Оказывается, что случай положительных сигнатур, который мы сейчас рассмотрели, отвечает асимптотической теории характеров бесконечной симметрической группы.

4.6 Упражнения

Упражнение 4.1. Зафиксируем $F \in \Lambda_{\deg=k}$ ($k \geq 1$). Покажите, что факт существования предела (4.4) при $N \rightarrow \infty$ и величина этого предела не зависят от выбора сдвинуто-симметрической $F^* \in \Lambda_{\deg \leq k}^*$, старшая степень которой равна F .

Упражнение 4.2. Докажите предложение 4.6.

Упражнение 4.3. Докажите,³² что функции h_k^* и e_k^* (определение 4.7) являются сдвинуто-симметрическими по переменным $y_1, y_2, \dots$. Другими словами, если ограничиться N переменными (положить $y_{N+1} = y_{N+2} = \dots = 0$), и сделать замену $\tilde{y}_i = y_i - i + \text{Const}$ (константа может быть любая, например, ноль), то полученные многочлены уже будут симметрическими по переменным $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_N$ (см. также определение 3.19).

Указание. В качестве простого примера можно рассмотреть функцию

$$e_2^*(y_1, y_2, \dots) = \sum_{i < j} (y_i + 1)y_j. \quad (4.31)$$

Упражнение 4.4. Докажите равенства (4.12).

Упражнение 4.5. Докажите лемму 4.15.

Указание. Рассмотрите сначала случай нулевых сдвижек, а затем сведите общий случай к нему, заметив, что

$$\frac{1}{Nv - \varepsilon} = \frac{1}{N(v - \varepsilon/N)} \sim \frac{1}{Nv}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (4.32)$$

Упражнение 4.6. Завершите доказательство соотношений (4.26).

5 Последовательности Вершика-Керова и завершение доказательства теоремы Войкулеску

Эта лекция завершает обсуждение теоремы Войкулеску (теорема 2.21). Мы покажем, что для последовательностей сигнатур, удовлетворяющей определенным условиям, предел, о котором идет речь в определении 2.8, существует³³ и имеет нужный вид, как в теореме 2.21. Доказательство того, что других регулярных последовательностей сигнатур не бывает, мы опустим, но дадим некоторые указания и необходимые ссылки.

Однако сначала сделаем одно добавление к предыдущей лекции, касающееся производящей функции сдвинуто-симметрических функций h_k^* .

5.1 Производящая функция $H^*(v)$

Напомним, что у нас есть алгебра сдвинуто-симметрических функций Λ^* , присоединенная градуированная алгебра которой есть Λ (алгебра обычных симметрических функций). В алгебре Λ есть однородные образующие h_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) — полные симметрические функции. Мы рассматривали «поднятия» h_k в алгебру Λ^* — сдвинуто-симметрические функции h_k^* , которые определялись формулой (4.11). После чего мы без доказательства сказали, что производящая функция для h_k^* ,

$$H^*(v; y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*(y)}{v^{\downarrow k}}, \quad (5.1)$$

имеет вид (предложение 4.11)

$$H^*(v; y) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{v + i}{v - y_i + i}. \quad (5.2)$$

На самом деле, равенства (5.1)–(5.2) можно взять за определение функций $h_k^* \in \Lambda^*$. Тот факт, что h_k^* имеют явный вид (4.11), нам в действительности не потребуется. Нам нужно лишь свойство, что h_k^* суть поднятия h_k , то есть,

$$h_k^* \in \Lambda_{\deg \leq k}^* \quad \text{и} \quad h_k^* \bmod \Lambda_{\deg \leq (k-1)}^* = h_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

³²Без использования предложения 4.11.

³³Такие последовательности сигнатур называются *регулярными*.

А это можно установить, используя лишь (5.1)–(5.2). Действительно, легко проверить, что

$$\log H^*(v; y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^*(y)}{k} v^{-k}, \quad (5.4)$$

где p_k^* — «поднятия» сумм Ньютона p_k , введенные в (3.27)). С другой стороны, в алгебре Λ есть аналогичное тождество [Мак84, Глава I, §2]

$$\log H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{k} t^k \quad (5.5)$$

(здесь можно считать, что $t = v^{-1}$). Поэтому из того, что p_k^* — «поднятия» p_k , следует аналогичный факт о функциях h_k^* (упражнение 5.1).

5.2 Последовательности разбиений Вершика-Керова

В этом и следующем подразделе мы приведем достаточные условия на последовательность $\lambda(N)$, чтобы она была инфинитезимально-регулярной.³⁴ В данном подразделе мы рассмотрим случай разбиений (неотрицательных сигнатур), а в следующем — общий случай.

Напомним, что (предложение 4.20)

$$H^*(v - \frac{1}{2}; \lambda) = \prod_{i=1}^d \frac{v + b_i}{v - a_i}, \quad (5.6)$$

где $\lambda \in \text{Part}$ (то есть, λ является разбиением, а не сигнатурой) интерпретируется как диаграмма Юнга, и $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$ — (модифицированные) координаты Фробениуса диаграммы λ . Обозначим правую часть этого равенства через $\Phi(v; \lambda)$. Имеем

$$\log \Phi(v; \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(a; -b)}{k} v^{-k}, \quad (5.7)$$

где

$$p_k(a; -b) := \sum_{i=1}^d a_i^k - \sum_{i=1}^d (-b_i)^k \quad (5.8)$$

— суперсуммы Ньютона от координат Фробениуса $(a_1, \dots, a_d \mid b_1, \dots, b_d)$.

Определение 5.1. Последовательность разбиений $\{\lambda(N)\}$ называется *последовательностью Вершика-Керова*, если выполнены следующие условия:

$$\frac{a_i(N)}{N} \rightarrow \alpha_i, \quad \frac{b_i(N)}{N} \rightarrow \beta_i, \quad \frac{|\lambda(N)|}{N} \rightarrow \delta, \quad (5.9)$$

где $a_i(N)$ и $b_i(N)$ — координаты Фробениуса $\lambda(N)$.

Ясно, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq 0$, $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq 0$, а также что $\sum_i (\alpha_i + \beta_i) \leq \delta$. Положим $\gamma := \delta - \sum_i (\alpha_i + \beta_i)$, и $\gamma \geq 0$. Пример 4.23 показывает, что γ не обязательно должно быть нулем (хотя соответствующие величины до предела равны нулю).

Напомним, что инфинитезимальная регулярность последовательности разбиений $\{\lambda(N)\}$ эквивалентна тому, что для всех k величины $h_k^*(\lambda(N))/N^k$ имеют предел при $N \rightarrow \infty$. Лемма 4.15 показывает, что это то же самое, что сходимость³⁵ производящих функций $H^*(Nv; \lambda(N))$ (или, что эквивалентно, производящих функций $\Phi(Nv; \lambda(N))$, так как $\Phi(v) = H^*(v - \frac{1}{2})$).

³⁴Определение 4.1.

³⁵Покоэффициентная, то есть, в смысле определения 4.14.

Теорема 5.2. Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность разбиений Вершика-Керова (определение 5.1). Тогда имеет место покоэффициентная сходимость степенных рядов

$$\Phi(Nv; \lambda(N)) \rightarrow e^{\gamma t} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i t}{1 - \alpha_i t}, \quad t := \frac{1}{v}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

Доказательство. Если прологарифмировать $\Phi(Nv; \lambda(N))$, это не испортит покоэффициентной сходимости (упражнение 5.2). Имеем

$$\log \Phi(Nv; \lambda(N)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k(a(N); -b(N))}{N^k} \frac{t^k}{k}, \quad (5.11)$$

где $t = 1/v$.

Первое слагаемое в этой сумме (коэффициент при v в первой степени), очевидно, имеет предел:

$$\frac{p_1(a(N); -b(N))}{N} = \frac{|\lambda(N)|}{N} \rightarrow \delta, \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.12)$$

Если же $k \geq 2$, то сходимость ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_i}{N} \right)^k + (-1)^{k-1} \left(\frac{b_i}{N} \right)^k \right) \quad (5.13)$$

равномерна по N .³⁶ Действительно, так как

$$\sum_i \frac{a_i}{N} + \sum_i \frac{b_i}{N} = \frac{|\lambda(N)|}{N} \leq \delta + 1 \quad (5.14)$$

для всех достаточно больших N и последовательности a_i и b_i убывают, то легко видеть, что

$$\frac{a_i}{N} \leq \frac{\delta + 1}{i}, \quad \frac{b_i}{N} \leq \frac{\delta + 1}{i}, \quad (5.15)$$

и поэтому ряд (5.13) сходится равномерно при любом $k \geq 2$.³⁷

Поэтому мы можем переставить предел по N и суммирование по i в (5.10), и получить

$$\log \Phi(Nv; \lambda(N)) \rightarrow \delta t + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{p_k(\alpha; -\beta)}{k} t^k, \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.16)$$

где $t = 1/v$. Заменяя δ на $\gamma + \sum_i (\alpha_i + \beta_i)$ и вспоминая определение (5.8) суперсумм Ньютона $p_k(\alpha; -\beta)$, получим искомое утверждение теоремы. $\square$

5.3 Последовательности сигнатур

Теперь приведем достаточное условие инфинитезимальной регулярности последовательности сигнатур в общем случае (когда у них уже могут быть отрицательные координаты). Напомним (см. начало §4.5), что сигнатуру λ длины N удобно интерпретировать как пару разбиений λ^+ и λ^- , которые удовлетворяют дополнительному условию $\ell(\lambda^+) + \ell(\lambda^-) \leq N$. При этом разбиение λ^+ содержит в себе все положительные координаты λ , а λ^- — все отрицательные части λ , прочитанные в обратном порядке, нулевые координаты в λ при этом выкидываются. Таким путем можно свести случай общих сигнатур к случаю неотрицательных сигнатур. Этот прием, по-видимому, хорошо работает только на уровне производящих функций элементов $h_k^* \in \Lambda^*$, и становится ощутимо более сложным на уровне «индивидуальных» функций h_k^* .

³⁶Хотя при каждом фиксированном N этот ряд представляет собой конечную сумму, но количество слагаемых в ней может расти. Именно поэтому нам нужна равномерная сходимость.

³⁷Дополнительное условие $|\lambda(N)|/N \rightarrow \delta$ как раз возникает из-за того, что для $k = 1$ подобное рассуждение о равномерной сходимости не проходит.

Лемма 5.3. Пусть $\lambda \in \text{Sign}(N)$, $\lambda = (\lambda^+; \lambda^-)$, где λ^+ и λ^- — диаграммы Юнга. Тогда

$$H^*(v; \lambda) = H^*(v; \lambda^+) H^*(-v - N - 1; \lambda^-). \quad (5.17)$$

Отметим, что к левой части формула из предложения 4.20 неприменима, и эта левая часть может определяться по формуле (5.1) или (5.2).

Доказательство. Запишем

$$H^*(v; \lambda) = \prod_{i=1}^N \frac{v + i}{v - \lambda_i + i}. \quad (5.18)$$

Отметим, что если $\lambda_i = 0$, то числитель и знаменатель сокращаются. Положим $l^+ = \ell(\lambda^+)$, $l^- = \ell(\lambda^-)$. Тогда $\lambda = (\lambda_1^+, \dots, \lambda_{l^+}^+, 0, \dots, 0, -\lambda_1^-, \dots, -\lambda_{l^-}^-)$, и

$$H^*(v; \lambda) = \prod_{i=1}^{l^+} \frac{v + i}{v - \lambda_i^+ + i} \prod_{j=1}^{l^-} \frac{v + (N + 1 - j)}{v + \lambda_j^- + (N + 1 - j)}, \quad (5.19)$$

где во втором произведении мы сделали замену $i = N + 1 - j$. $\square$

Ясно, что для функций $\Phi(v; \lambda)$ (определенных в §5.2) эта лемма переписывается так:

$$\Phi(v; \lambda) = \Phi(v; \lambda^+) \Phi(-v - N; \lambda^-). \quad (5.20)$$

Теперь можно сформулировать достаточное условие инфинитезимальной регулярности последовательности сигнатур (не обязательно неотрицательных).

Теорема 5.4. Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур, $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$. Пусть $\lambda(N) = (\lambda^+(N); \lambda^-(N))$ для всех N , и пусть каждая из последовательностей $\{\lambda^+(N)\}$ и $\{\lambda^-(N)\}$ является последовательностью разбиений Вершика-Керова (определение 5.1). Тогда

$$\Phi(Nv; \lambda(N)) \rightarrow e^{\gamma^+ t + \gamma^- t'} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+ t}{1 - \alpha_i^+ t} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^- t'}{1 - \alpha_i^- t'}. \quad (5.21)$$

Здесь $v = t^{-1}$, а t' — такое, что $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = -1$, и $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$ — параметры из определения 5.1 соответственно для последовательностей разбиений $\{\lambda^+(N)\}$ и $\{\lambda^-(N)\}$.

Доказательство. По лемме 5.3:

$$\Phi(Nv; \lambda(N)) = \Phi(Nv; \lambda^+(N)) \Phi(N(-v - 1); \lambda^-(N)). \quad (5.22)$$

Положим $v' := -v - 1$, тогда $(v')^{-1} = t'$. Все остальное вытекает из предыдущей теоремы для случая разбиений (теорема 5.2). $\square$

5.4 Инфинитезимальная сходимость нормированных характеров

В этом и следующем подразделе мы покажем, что (2.32) — действительно экстремальные характеры группы $U(\infty)$ (см. теорему Войкулеску 2.21 и предшествующее ей обсуждение), и явно укажем последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$, для которых нормированные характеры $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ сходятся к (2.32). Тот факт, что формула (2.32) дает все экстремальные характеры группы $U(\infty)$, мы не доказываем, однако ниже мы дадим указания и необходимые ссылки.

Таким образом, мы хотим показать, что для последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$ ($\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$), такой что $\{\lambda^+(N)\}$ и $\{\lambda^-(N)\}$ — последовательности разбиений Вершика-Керова, нормированные характеры

$$\tilde{s}_{\lambda(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1) \quad (5.23)$$

сходятся *равномерно* (при каждом фиксированном n и $N \rightarrow \infty$) к функции вида $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$ на торе $\mathbb{T}^n$, где $x_i = u_i - 1$ и

$$\Psi(t) := e^{\gamma^+ t + \gamma^- t'} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^+ t}{1 - \alpha_i^+ t} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i^- t'}{1 - \alpha_i^- t'}. \quad (5.24)$$

Здесь $\frac{1}{t} + \frac{1}{t'} = -1$ и $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$ — предельные параметры для последовательностей сигнатур $\{\lambda^\pm(N)\}$ (см. определение 5.1).

В этом подразделе мы докажем (с помощью теоремы 5.4) инфинитезимальную сходимость, а в следующем подразделе мы получим из нее равномерную.

С помощью биномиальной формулы (3.5) можно записать (см. (3.20)):

$$\tilde{s}_{\lambda(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq n} \frac{s_\mu^*(\lambda(N)) s_\mu(x_1, \dots, x_n)}{(N)_\mu}, \quad (5.25)$$

где $u_i = 1 + x_i$, и $(N)_\mu$ определено формулой (3.18).³⁸ Инфинитезимальную сходимость нормированных характеров $\tilde{s}_{\lambda(N)}$, можно сформулировать так:

Теорема 5.5. Пусть $\{\lambda(N)\}$, $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$ — последовательность сигнатур, такая что $\{\lambda^\pm(N)\}$ — последовательности разбиений Вершика-Керова с параметрами $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$.

Тогда для каждого фиксированного n и $\mu \in \text{Part}$ с $\ell(\mu) \leq n$ выполнена сходимость

$$\frac{s_\mu^*(\lambda(N))}{(N)_\mu} \rightarrow [s_\mu] \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.26)$$

Здесь Ψ определено по формуле (5.24).

Замечание 5.6. (1) Правая часть (5.26) не зависит от $x_1, \dots, x_n$ и представляет собой коэффициент при s_μ в $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$. Выражение $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$ — это формальный степенной ряд по $x_1, \dots, x_n$,³⁹ который, кроме того, симметричен по $x_1, \dots, x_n$, и поэтому его можно разложить в сумму по функциям Шура, и взять коэффициент, который получится при s_μ . Ср. это рассуждение с началом §3.3.

(2) Сходимость, которую утверждает теорема 5.5 — это сходимость формальных степенных рядов $\tilde{s}_{\lambda(N)}(1 + x_1, \dots, 1 + x_n, 1, \dots, 1)$ к формальному степенному ряду $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$, которую мы и называем *инфинитезимальной сходимостью нормированных характеров*.

До конца этого подраздела мы доказываем теорему 5.5.

Определение 5.7. Алгебру симметрических функций Λ можно рассматривать как алгебру полиномов от бесконечного числа переменных. В качестве этих переменных можно брать любую систему образующих алгебры Λ , например, $\{p_k\}$, $\{e_k\}$ или $\{h_k\}$. Мы будем говорить об образующих $\{h_k\}$, то есть, $\Lambda = \mathbb{C}[h_1, h_2, \dots]$.

(Комплексной) специализацией ψ алгебры Λ будем называть гомоморфизм

$$\psi: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi: h_k \mapsto \psi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.27)$$

где $\psi_k \in \mathbb{C}$ — произвольные комплексные числа.⁴⁰ Определенное на $\{h_1, h_2, \dots\}$, это отображение продолжается на всю алгебру Λ , и дает гомоморфизм $\psi: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$. См. также обсуждение перед предложением 4.2.

³⁸ Нам требуется лишь свойство, что $(N)_\mu \sim N^{|\mu|}$ при $N \rightarrow \infty$.

³⁹ Так как функция $\Psi(t)$ — формальный степенной ряд по t . Отметим, что он начинается с единицы (то есть, $\Psi(0) = 1$). Кроме того, $\Psi(u-1)$ является аналитической функцией на окружности $\mathbb{T}^1$, но это нам пока не нужно.

⁴⁰ В этом состоит отличие от специализации алгебры Λ путем присваивания естественным переменным $x_1, x_2, \dots$ каких-либо значений, ведь тогда необходимо требовать, чтобы все симметрические функции были корректно определены.

Другими словами, можно взять любой формальный степенной ряд, начинающийся с единицы (к комплексным коэффициентам) $A(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k$, и задать специализацию алгебры Λ как $\psi: H(t) \rightarrow A(t)$. Например, в качестве этого ряда $A(t)$ можно взять функцию $\Psi(t)$, заданную (5.24).

Пример 5.8. Самая естественная специализация состоит в том, чтобы взять переменные алгебры симметрических функций $x_1, x_2, \dots, x_m$ в некотором конечном числе, и приписать им произвольные значения. Разумеется, эту же специализацию можно задать и на образующих h_k как в определении 5.7. Обратное, однако, неверно (упражнение 5.3).

Докажем важное тождество в алгебре симметрических функций, которое затем будем специализировать.

Предложение 5.9 (формула Коши). *Пусть $x_1, \dots, x_N$ и $y_1, \dots, y_N$ — формальные переменные. Рассмотрим производящие функции*

$$H(y; x_i) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(y) x_i^k, \quad (5.28)$$

где $i = 1, \dots, N$ и x_i считается параметром. Тогда

$$H(y; x_1) \dots H(y; x_N) = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} s_{\mu}(y_1, \dots, y_N) s_{\mu}(x_1, \dots, x_N). \quad (5.29)$$

Доказательство. Заметим, что

$$H(y; x_i) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j}, \quad (5.30)$$

поэтому нам надо доказать, что

$$\prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} s_{\mu}(y_1, \dots, y_N) s_{\mu}(x_1, \dots, x_N). \quad (5.31)$$

Домножая обе части на произведение определителей Вандермонда $V_N(x_1, \dots, x_N) V_N(y_1, \dots, y_N)$, получим

$$V_N(x_1, \dots, x_N) V_N(y_1, \dots, y_N) \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} a_{\mu+\delta}(y_1, \dots, y_N) a_{\mu+\delta}(x_1, \dots, x_N), \quad (5.32)$$

где $a_{\mu+\delta}$ — альтернант (см. (1.9)–(1.10)).

Теперь предложение вытекает из следующей формулы для *определителя Коши*:

$$\det \left[\frac{1}{1 - x_i y_j} \right]_{i,j=1, \dots, N} = V_N(x_1, \dots, x_N) V_N(y_1, \dots, y_N) \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (5.33)$$

(упражнение 5.4), если заметить, что

$$\sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq N} a_{\mu+\delta}(y_1, \dots, y_N) a_{\mu+\delta}(x_1, \dots, x_N) = \det \left[\frac{1}{1 - x_i y_j} \right]_{i,j=1, \dots, N} \quad (5.34)$$

(упражнение 5.5). □

Замечание 5.10. В [Мак84, Глава I, §4] формула Коши доказывается с помощью формулы Якоби-Труди, которая в свою очередь имеет вид

$$s_\mu = \det [h_{\mu_i - i + j}], \quad (5.35)$$

где $\mu \in \text{Part}$, $h_1, h_2, \dots$ — полные симметрические функции, $h_0 = 1$, $h_{-1} = h_{-2} = \dots = 0$, а порядок детерминанта может быть любым, не меньшим, чем $\ell(\mu)$.

Следствие 5.11. Пусть $\Psi(x)$ — произвольный формальный степенной ряд со свободным членом 1 и $\psi : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ — специализация, определенная условием $\psi : H(x) \rightarrow \Psi(x)$. Тогда для любого $n = 1, 2, \dots$ и любого разбиения μ с $\ell(\mu) \leq n$

$$\psi(s_\mu) = [s_\mu] \Psi(x_1) \dots \Psi(x_n).$$

Доказательство. Предполагая $N \geq n$, положим в формуле Коши $x_{n+1} = \dots = x_N = 0$. Тогда получим

$$s_\mu(y) = [s_\mu] H(y; x_1) \dots H(y; x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_N),$$

где в правой части имеется в виду коэффициент при $s_\mu(x_1, \dots, x_n)$. Поскольку N может быть сколь угодно велико, отсюда следует тождество в алгебре Λ

$$s_\mu = [s_\mu] H(x_1) \dots H(x_n).$$

Применяя к обеим частям ψ , получаем требуемое. $\square$

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы 5.5. Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур, удовлетворяющая условиям теоремы. Мы знаем из теоремы 5.4, что для всех $k = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\frac{h_k^*(\lambda(N))}{N^k} \rightarrow [t^k] \Psi(t), \quad N \rightarrow \infty, \quad (5.36)$$

где в правой части стоит коэффициент при t^k в $\Psi(t)$, а $\Psi(t)$ определяется по формуле (5.24). Пусть ψ — специализация алгебры Λ , такая что

$$\psi : h_k \rightarrow [t^k] \Psi(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

Другими словами, $\psi : H(t) \rightarrow \Psi(t)$.

Тогда (см. §4.1) для любого фиксированного разбиения μ ,

$$\frac{s_\mu^*(\lambda(N))}{N^{|\mu|}} \rightarrow \psi(s_\mu), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.38)$$

Отсюда следует

$$\sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq n} \frac{s_\mu^*(\lambda(N)) s_\mu(x_1, \dots, x_n)}{N^{|\mu|}} \rightarrow \sum_{\mu \in \text{Part}, \ell(\mu) \leq n} \psi(s_\mu) s_\mu(x_1, \dots, x_n), \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.39)$$

Здесь имеется в виду покоеффициентная сходимость формальных степенных рядов (определение 4.14), поэтому суммирование по μ законно.

С другой стороны, следствие 5.11 говорит, что правая часть совпадает с $\Psi(x_1) \dots \Psi(x_n)$. Это завершает доказательство теоремы 5.5.

5.5 Равномерная сходимость нормированных характеров

Теперь мы перейдем к доказательству равномерной сходимости нормированных характеров $\tilde{s}_{\lambda(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1)$ к $\Psi(u_1 - 1) \dots \Psi(u_n - 1)$ на торе $\mathbb{T}^n$, где $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур как в теореме 5.4, а Ψ определяется по формуле (5.24). Равномерная сходимость выводится из инфинитезимальной (теорема 5.5) и из общих теорем о слабой сходимости мер, на которые мы будем ссылаться. Их можно найти, например, в [Шир07].

Обозначим

$$f_N(u_1, \dots, u_n) := \tilde{s}_{\lambda(N)}(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1), \quad f(u_1, \dots, u_n) := \Psi(u_1 - 1) \dots \Psi(u_n - 1). \quad (5.40)$$

Заметим, что f_N представляют собой преобразования Фурье вероятностных мер на решетке $\mathbb{Z}^n$. А именно, функция Шура $s_{\lambda(N)}$ разлагается по мономам вида $u_1^{m_1} \dots u_n^{m_n}$, $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, с неотрицательными коэффициентами (см. §1.6), и поэтому можно рассмотреть меру

$$M_N := \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{c_m}{s_{\lambda}(1, \dots, 1)} \delta_m, \quad (5.41)$$

где коэффициенты $c_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определяются из условия $s_{\lambda(N)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m u^m$, а δ_m — дельта-мера в точке $m \in \mathbb{Z}^n$. То, что мера M_N вероятностная, следует из нормировки $f_N(1, \dots, 1) = 1$.

Для мер на решетке выполнено следующее свойство:

Предложение 5.12. *Последовательность вероятностных мер M_N на решетке $\mathbb{Z}^n$ слабо сходится к некоторой вероятностной мере M на $\mathbb{Z}^n$ при $N \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда преобразования Фурье мер M_N (а это функции на торе $\mathbb{T}^n$) сходятся равномерно к преобразованию Фурье меры M .*

Та инфинитезимальная сходимость, которую мы установили в теореме 5.5, равносильна сходимости всех моментов мер M_N при $N \rightarrow \infty$.⁴¹ Пользуясь неравенством Чебышева, можно показать (упражнение 5.6), что семейство мер $\{M_N\}$ *плотно*, то есть, для всякого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset \mathbb{Z}^n$ (в нашем случае это просто конечное множество), для которого

$$M_N(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall N = 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

По теореме Прохорова, существует подпоследовательность $\{N_k\}$, такая что меры M_{N_k} сходятся к некоторой вероятностной мере M . Опять-таки с помощью неравенства Чебышева проверяется, что пределы моментов мер M_N совпадают с соответствующими моментами меры M .

Далее, мы знаем, что функция $f(u_1, \dots, u_n)$ является вещественно-аналитической на $\mathbb{T}^n$, то есть, однозначно определяется своими коэффициентами Тейлора в нуле. Поэтому мера M однозначно определяется своими моментами. Значит, M не зависит от выбора подпоследовательности в M_N (так как у любой подпоследовательности моменты сходятся к одним и тем же величинам), и таким образом, меры M_N слабо сходятся к M . Это, в свою очередь, влечет равномерную сходимость преобразований Фурье $f_N \rightrightarrows f$.

Таким образом, мы доказали достаточное условие регулярности последовательности сигнатур $\{\lambda(N)\}$ и показали, что функции, выписанные в теореме 2.21, действительно являются экстремальными характерами группы $U(\infty)$.

5.6 Об обратной теореме

Здесь мы дадим краткие пояснения, как доказывать, что формулы в теореме 2.21 действительно описывают *все* экстремальные характеры. Подробно об этом написано в [Око97] и [ОО98].

⁴¹Стоит отметить, что пока мы не знаем ничего о существовании предельной меры!

Пусть $\{\lambda(N)\}$ — последовательность сигнатур, $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$, такая, что нормированные характеры $\tilde{s}_{\lambda(N)}$ сходятся в смысле определения 2.7 к некоторой функции χ на финитном бесконечномерном торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$. Наша задача — показать, что функция χ имеет вид (2.32)–(2.33). Ключевое соображение состоит в том, чтобы, показав, что величины $|\lambda^\pm(N)|$ имеют не более, чем линейный рост. Действительно, тогда можно выделить подпоследовательность, по которой величины $|\lambda^\pm(N)|/N$ сходятся. Далее, ясно, что все $a_i^\pm(N)$ и $b_i^\pm(N)$ (координаты Фробениуса) также имеют не более, чем линейный рост,⁴² а значит, можно выбрать подпоследовательность, по которой и все величины $a_i^\pm(N)/N$ и $b_i^\pm(N)/N$ также будут иметь предел, и тогда можно будет воспользоваться прямой теоремой Войкулеску, которую мы уже доказали.

Таким образом, главная цель — показать, что последовательность $|\lambda^\pm(N)|$ не может расти слишком быстро.

Окуньков [Око97] показал, что это можно вывести из нетривиального свойства конечномерных характеров, т.н. *log-вогнутости*. На самом простом примере оно состоит в следующем. Рассмотрим разложение

$$\frac{s_\lambda(u, 1, \dots, 1)}{s_\lambda(1, \dots, 1)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c(m) u^m. \quad (5.43)$$

Тогда последовательность $\{c(m)\}$ *log-вогнута* в том смысле, что

$$c(m-1)c(m+1) \leq c(m)^2. \quad (5.44)$$

На самом деле, в [Око97] установлен много более общий результат, повлекший за собой ряд дальнейших исследований.

Другой способ, который можно назвать *методом второго–четвертого момента*, изложен в [ОО98]. Его достоинство в том, что он допускает более простое доказательство и (в отличие от метода [Око97]) работает и в более общей ситуации, рассматриваемой в [ОО98].

Этот второй способ основан на следующем утверждении ([ОО98, Lemma 5.2]):

Лемма 5.13. *Предположим, что последовательность вероятностных мер на $\mathbb{Z}$ плотна, все меры имеют конечные четвертые моменты, и при этом вторые моменты стремятся к бесконечности. Тогда четвертые моменты растут быстрее, нежели квадраты вторых моментов.*

Пусть теперь $\{\lambda(N)\}$, $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$ — последовательность сигнатур и M_N — соответствующие вероятностные меры на $\mathbb{Z}$. Обозначим через $E_2(N)$ и $E_4(N)$ соответственно последовательности вторых и четвертых моментов мер M_N . Предположим, что последовательность сигнатур $\{\lambda(N)\}$ такова, что (возможно, по некоторой подпоследовательности)

$$\frac{|\lambda^+(N)| + |\lambda^-(N)|}{N} \rightarrow \infty, \quad N \rightarrow \infty. \quad (5.45)$$

Тогда можно показать, что $E_2(N)$ также стремится к бесконечности, но при этом отношение $E_4(N)/(E_2(N))^2$ остается ограниченным. В силу леммы, семейство $\{M_N\}$ не плотно и, значит, меры M_N не имеют слабого предела, то есть характеры заведомо не имеют равномерного предела даже на окрестности.

5.7 Упражнения

Упражнение 5.1. Докажите, что h_k^* суть поднятия h_k (то есть, завершите рассуждения §5.1).

Упражнение 5.2. Покажите, что покоеффициентная сходимость (в смысле определения 4.14) степенных рядов эквивалентна покоеффициентной сходимости их логарифмов.

⁴²Так как $\sum(a_i^\pm(N) + b_i^\pm(N)) = |\lambda^\pm(N)|$ и все $a_i^\pm(N)$ и $b_i^\pm(N)$ неотрицательны.

Упражнение 5.3. Покажите, что специализацию алгебры Λ (см. определение 5.7), состоящую в том, что $\psi(h_k) = 1/k!$ для всех $k \geq 1$, нельзя задать «естественным» образом, как в примере 5.8. Эта специализация Λ имеет большое значение, ее можно назвать *специализацией Планшереля*.

Упражнение 5.4. Докажите формулу (5.33) для определителя Коши.

Указание. Можно заметить, что

$$\det \left[\frac{1}{1 - x_i y_j} \right] \cdot \prod_{i,j=1}^N (1 - x_i y_j) \quad (5.46)$$

— кососимметрический многочлен по $x_1, \dots, x_N$ и по $y_1, \dots, y_N$, поэтому он делится на $V_N(x)V_N(y)$. Кроме того, его степень равна $N(N-1)$, поэтому в результате деления может получиться только константа. Можно понять, что она равна единице.

Упражнение 5.5. Завершите доказательство формулы Коши (предложение 5.9).

Упражнение 5.6. Покажите, что если семейство вероятностных мер $\{M_N\}$ на полупрямой имеет равномерно ограниченные первые моменты, то это семейство является плотным.

6 Тотальная положительность

В предыдущих лекциях мы обсуждали теорему 2.21, дающую описание всех экстремальных характеров бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$. Согласно этой теореме, все экстремальные характеры $U(\infty)$ имеют вид (2.32)–(2.33). Теорема 2.21 была высказана Войкулеску в работе 1978 г. Но за 30 лет до того, в 1948 году, та же самая формула появилась у Шёнберга (Schoenberg) в совершенно ином контексте: тотальная положительность матриц (Войкулеску об этом явно не знал).⁴³ Само понятие тотальной положительности возникло еще в начале XX в. Шёнберг сформулировал некоторую гипотезу, решение которой было дано Эдреи (Edrei) в 1953 г. [Edr53]. В этой лекции мы обсудим работу Шёнберга, а в следующей — покажем, как связана тотальная положительность с теорией представлений.

6.1 Определение и примеры

Определение 6.1. Пусть $X = [X_{ij}]$ — матрица над $\mathbb{R}$ (конечная или бесконечная). Пусть $I = \{i_1 < \dots < i_n\}$ и $J = \{j_1 < \dots < j_n\}$ — два конечных набора индексов. Матрица $X_{IJ} := [X_{i_k, j_l}]_{k,l=1,\dots,n}$ называется *подматрицей* матрицы X . Ее определитель $|X_{IJ}|$ называется *минором* матрицы X . Если будет нужно, мы будем говорить « IJ -подматрица» и « IJ -минор», соответственно.

Определение 6.2. Матрица X называется *тотально положительной* (обозначается $X \in (TP)$), если $|X_{IJ}| \geq 0$ для всех конечных наборов I, J (одинакового размера). Другими словами, все миноры всех порядков матрицы X должны быть неотрицательны.

Пример 6.3. Например, для матрицы размера 2×2 , $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, условие тотальной положительности означает, что $a, b, c, d \geq 0$ и $ad - bc \geq 0$.

Приведем несколько более сложных примеров тотально положительных матриц.

⁴³Термин «тотальная положительность» представляет собой кальку с английского «total positivity». Перевести этот термин как «полная положительность» мешает то обстоятельство, что в теории операторных алгебр существует понятие «complete positivity», имеющее другой смысл.

Пример 6.4. 1. Пусть $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $1 > x_1 \geq \dots \geq x_N \geq 0$ и $1 > y_1 \geq \dots \geq y_N \geq 0$, тогда матрица

$$X_{ij} = \frac{1}{1 - x_i y_j} \quad (6.1)$$

порядка N является totally положительной (см. упражнение 6.1).

2. Пусть $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $x_1 \geq \dots \geq x_N > 0$ и $y_1 \geq \dots \geq y_N > 0$, тогда матрица

$$X_{ij} = \frac{1}{x_i + y_j} \quad (6.2)$$

порядка N является totally положительной (см. упражнение 6.1).

3. Пусть $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $x_1 \geq \dots \geq x_N$ и $y_1 \geq \dots \geq y_N$, тогда матрица

$$X_{ij} = e^{x_i y_j} \quad (6.3)$$

порядка N является totally положительной (см. упражнение 6.2).

Приведем два свойства totally положительных матриц.

Предложение 6.5. Если X — невырожденная totally положительная матрица конечного порядка, то матрица Y , определяемая как $Y_{ij} = (-1)^{i+j} (X^{-1})_{ij}$, также является totally положительной.

Доказательство. Упражнение 6.3. □

Предложение 6.6. Если $X, Y \in (TP)$ — матрицы конечного порядка, то их произведение $XY \in (TP)$.⁴⁴

Доказательство. Это следует из формулы для вычисления минора произведения двух матриц (упражнение 6.4):

$$|(XY)_{IJ}| = \sum_{K: \#K=\#I} |X_{IK}| \cdot |Y_{KJ}|. \quad (6.4)$$

Здесь I и J — конечные подмножества индексов одинакового размера. □

Более подробно о totally положительных матрицах можно прочитать в книгах [ГК50] и [Kar68].

6.2 Тотальная положительность и графы

В этом подразделе мы введем полезный комбинаторный формализм, который позволяет доказывать тотальную положительность матриц. Здесь мы будем говорить только о матрицах конечного порядка.

Пусть $\Gamma = (V, E, w)$ — оснащенный ориентированный граф с вершинами V , ребрами $E \subset V \times V$ и оснащением $w: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (другими словами, каждому ребру приписывается неотрицательный вес). Мы предполагаем, что граф не имеет кратных ребер.

Через P будем обозначать ориентированные пути по ребрам графа, через $w(P) := \prod_{e \in P} w(e)$ — вес пути P . Обозначим через $\text{Path}(v', v'')$ множество всех (ориентированных) путей от вершины v' до вершины v'' . Предположим, что

(C1) Для любых двух вершин v' и v'' число путей от v' к v'' конечно.

⁴⁴Что означает, что множество totally положительных матриц фиксированного порядка образует полугруппу.

Отметим, что это условие запрещает циклы и петли в графе Γ .

Определение 6.7. Пусть есть два упорядоченных конечных набора вершин одинакового размера n :

$$V' = \{v'_1, \dots, v'_n\} \subset V, \quad V'' = \{v''_1, \dots, v''_n\} \subset V. \quad (6.5)$$

С набором (V, V', V'', E, w) можно связать матрицу X порядка n следующим образом:

$$X_{ij} := \sum_{P \in \text{Path}(v'_i, v''_j)} w(P). \quad (6.6)$$

В силу условия (C1), это определение корректно.

По определению детерминанта,

$$|X| = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(s) X_{1,s(1)} \dots X_{n,s(n)} = \sum_{P_1, \dots, P_n} \text{sgn}(P_1, \dots, P_n) w(P_1) \dots w(P_n), \quad (6.7)$$

где вторая сумма ведется по всем наборам путей $P_1, \dots, P_n$, таких, что начало каждого пути P_i лежит в V' , а конец — в V'' , при этом пути $(P_1, \dots, P_n)$ осуществляют биекцию между V' и V'' . Знак $\text{sgn}(P_1, \dots, P_n)$ означает знак перестановки, которая соответствует этой биекции (напомним, что элементы V' и V'' пронумерованы). Обозначим множество таких наборов путей через $\mathcal{P}$, а набор $(P_1, \dots, P_n)$ для краткости будем обозначать через $\vec{P}$. Также через $\mathcal{P}^\circ \subset \mathcal{P}$ обозначим подмножество таких наборов путей $\vec{P}$, что каждые два пути P_i и P_j из $\vec{P}$ не пересекаются (по вершинам).

Лемма 6.8. В обозначениях, введенных выше, имеем

$$|X| = \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}). \quad (6.8)$$

Эта лемма была неоднократно доказана разными авторами, ее связывают с именами Lingström, Gessel–Viennot и Karlin–McGregor.

Доказательство. Доказательство будем вести методом инволюции. Мы знаем, что

$$|X| = \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P}} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}) = \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}) + \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}). \quad (6.9)$$

Чтобы доказать, что последняя сумма равна нулю, достаточно предъявить инволюцию

$$*: \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ \rightarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ, \quad \vec{P} \mapsto \vec{P}^*, \quad (6.10)$$

такую, что

- $w(\vec{P}^*) = w(\vec{P})$;
- $\text{sgn}(\vec{P}^*) = -\text{sgn}(\vec{P})$.

Эта инволюция строится следующим образом. Пусть $\vec{P} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^\circ$. Это значит, что какие-то два пути из $\vec{P}$ пересекаются. Пусть i — минимальный индекс, такой что путь P_i пересекается с каким-то другим путем из $\vec{P}$. Пусть v — первая точка пересечения пути P_i с другим путем, и пусть j — минимальный номер (большой, чем i) из всех номеров путей $P_1, \dots, P_n$, которые проходят через точку v . Этими условиями номера i и j , а также точка v , определены однозначно. Инволюция $*$ по определению состоит в перестановке «хвостов» путей P_i и P_j после точки v , как показано на рис. 7. Ясно, что $*$ удовлетворяет нашим двум условиям, и поэтому лемма доказана. $\square$

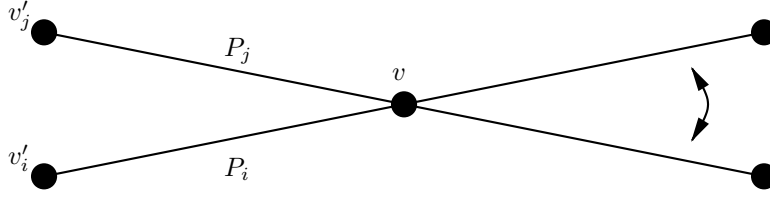


Рис. 7: Инволюция $*$.

Замечание 6.9. Отметим, что лемма 6.8 носит чисто алгебраический характер и условие $w(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ для нее не требуется. Однако с этого момента требование $w(\cdot) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ будет нам необходимо.

Введем еще одно условие на (V, V', V'', E, w) :

(C2) Если $i_1 < i_2$ и $j_1 < j_2$, $P \in \text{Path}(v'_{i_1}, v''_{j_2})$ и $Q \in \text{Path}(v'_{i_2}, v''_{j_1})$, то $P \cap Q \neq \emptyset$.

Предложение 6.10. Пусть $V', V'' \subset V$, $\#V' = \#V'' = N$, и набор (V, V', V'', E, w) удовлетворяет условиям (C1)–(C2). Пусть X — матрица из определения 6.7. Тогда X — totally positive матрица.

Доказательство. Это простое следствие леммы 6.8. Действительно, рассмотрим IJ -минор матрицы X , где $\#I = \#J = n$, и $V'_I \subset V'$, $V''_J \subset V''$. Тогда по лемме 6.8 имеем

$$|X_{IJ}| = \sum_{\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ} \text{sgn}(\vec{P}) w(\vec{P}) \quad (6.11)$$

(здесь $\mathcal{P}^\circ$ определяется по отношению к V'_I и V''_J). Из условия (C2) следует, что все наборы путей $\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ$ сохраняют нумерацию множеств V'_I и V''_J . Поэтому $\text{sgn}(\vec{P}) = +1$ для всех $\vec{P} \in \mathcal{P}^\circ$, и так как $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, то $|X_{IJ}| \geq 0$, что и требовалось. $\square$

Это предложение дает мощный способ доказательства тотальной положительности матриц. Рассмотрим один пример.

Пример 6.11. Рассмотрим граф V , изображенный на рис. 8 (здесь $n = 4$, хотя можно рассматривать этот граф для любого n). Все стрелки здесь идут слева направо, и все ребра имеют вес 1. Матрица X для него имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Видно, что эта матрица связана с треугольником Паскаля. Из предложения 6.10 следует, что X — totally positive матрица. То же самое верно и для матрицы любого порядка, построенной по треугольнику Паскаля аналогичным образом.

Также в графе на рис. 8 можно рассматривать другие кратности ребер, и получать много новых примеров totally positive матриц.

Замечание 6.12. Свойство (C2) выполняется, если граф можно нарисовать на плоскости таким образом, что все стрелки направлены вправо, вершины из V' располагаются в вертикальном ряду в порядке номеров (снизу вверх или сверху вниз, неважно), а вершины из V'' расположены аналогичным образом в параллельном ряду справа — как на рис. 8.

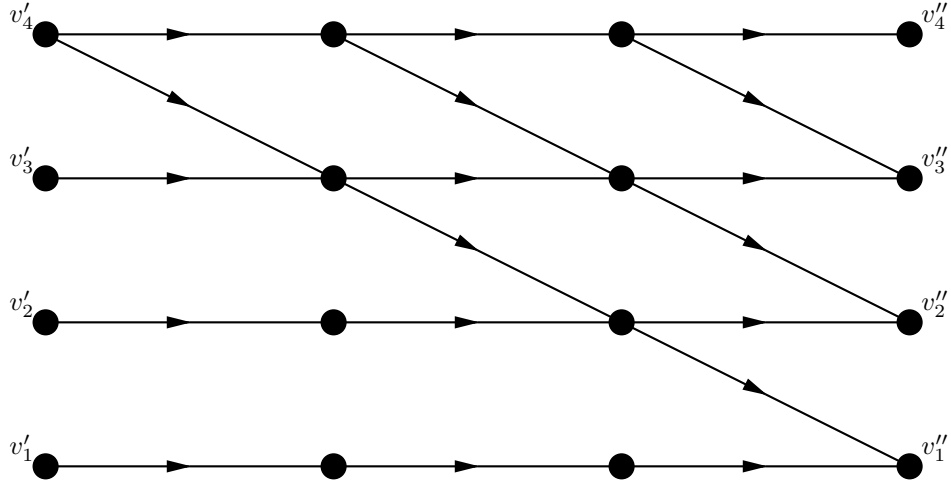


Рис. 8: Граф V .

Замечание 6.13. Пусть есть две totally положительные матрицы X и Y одинакового размера, которые построены по двум графам (скажем, у X начальные вершины V' и конечные V'' в графе Γ_X , а у Y — U' и U'' в графе Γ_Y , и эти два графа не имеют общих вершин).⁴⁵ Произведение матриц XY есть totally положительная матрица, построенная по объединению этих двух графов, которое получается, если отождествить вершины V'' и U' (то есть, v''_i с u'_i , $i = 1, \dots, \#V''$). Легко видеть, что свойство (C2) при этом не нарушается.

6.3 Тёплицевы матрицы

Теперь будем рассматривать бесконечные матрицы, которые имеют следующий специальный вид.

Определение 6.14. Матрица $[X_{ij}]_{i,j \in \mathbb{Z}}$ называется *тёплицевой*, если

$$X_{ij} = M(i - j), \quad i, j \in \mathbb{Z} \quad (6.13)$$

для некоторой функции M на $\mathbb{Z}$. В матричной форме

$$X = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & M(0) & M(-1) & M(-2) & \ddots \\ \ddots & M(1) & M(0) & M(-1) & \ddots \\ \ddots & M(2) & M(1) & M(0) & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

то есть, элементы матрицы X вдоль каждой диагонали, параллельной главной, постоянны.

Шёнберг в 1948 г. поставил вопрос об описании всех totally положительных тёплицевых матриц.

⁴⁵При этом считаем, что свойство (C2) выполнено.

Замечание 6.15. Вопрос был мотивирован задачей о сглаживании данных. Пусть есть последовательность данных $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, и шаблон $\{M(j)\}$, $j \in \mathbb{Z}$. По данным x и шаблону M строится сглаженная последовательность $y_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_{i-j} M(j)$, которая представляет собой свертку $x * M$. Шёнберг показал, что преобразование $x \mapsto y$ при помощи шаблона M не увеличивает числа осцилляций (перемен знака) тогда и только тогда, когда тёплицева матрица $X_{ij} = M(i-j)$ является totally positive.

Определение 6.16. Последовательность $M(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, для которой тёплицева матрица $X_{ij} = M(i-j)$ является totally positive, также называется *totally positive*.

6.4 log-вогнутость

Пусть $M(n)$ — totally positive последовательность, тогда $M(n) \geq 0$ для всех n (условие на миноры первого порядка), а также

$$\begin{vmatrix} M(n) & M(n-1) \\ M(n+1) & M(n) \end{vmatrix} \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (6.15)$$

(условие на миноры второго порядка). Второе условие равносильно log-вогнутости последовательности $M(n)$ (5.44):

$$M(n-1)M(n+1) \leq (M(n))^2. \quad (6.16)$$

Из log-вогнутости $M(n)$ уже вытекают некоторые важные свойства.

Лемма 6.17. 1. Последовательность $M(n) = cR^n$, где $c \geq 0$ и $R > 0$, является totally positive.

2. Если $M(n)$ — totally positive последовательность, то для всех $c \geq 0$ и $R > 0$ последовательность $M(n) \cdot cR^n$ также является totally positive.

Доказательство. Упражнение 6.6. □

Лемма 6.18. Если $M(n)$ — log-вогнутая последовательность, и $M(n) \neq cR^n$, то, заменяя $M(n)$ на $cR^n M(n)$ с подходящими c и R , можно добиться выполнения условия нормировки $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n) = 1$.

Доказательство. Упражнение 6.7. □

Таким образом, исключая тривиальный случай $M(n) = cR^n$, можно считать, что totally positive последовательность $M(n)$ является вероятностной мерой на $\mathbb{Z}$. В дальнейшем мы будем рассматривать только этот случай. Из условия log-вогнутости мы получим ограничения на «хвосты» меры $M(n)$:

Лемма 6.19. Если $M(n)$ — log-вогнутая последовательность, то

$$M(n) \leq C\varepsilon^{|n|} \quad (6.17)$$

для некоторого $0 < \varepsilon < 1$.

Доказательство. Для краткости пусть все $M(n)$ отличны от нуля (если это не так, доказательство можно провести аналогично с незначительными изменениями). Рассмотрим величины $\frac{M(n+1)}{M(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$. Так как $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n) = 1$, то все $\frac{M(n+1)}{M(n)}$ не могут быть ≥ 1 . Поэтому существует n , для которого $\frac{M(n+1)}{M(n)} < 1$. Обозначим эту величину для данного n через ε . Тогда из условия log-вогнутости, $\frac{M(n+2)}{M(n+1)} \leq \frac{M(n+1)}{M(n)} = \varepsilon$, и так далее, и мы получаем (6.17) для $n \rightarrow +\infty$. Для $n \rightarrow -\infty$ эту оценку можно получить аналогично. □

6.5 Характеристические функции totally положительных последовательностей

Теперь мы будем рассматривать вероятностные меры $M(n)$ на $\mathbb{Z}$, обладающие свойством totally положительности. Напомним, что по определению это означает, что тёплицева матрица $[M(i-j)]_{i,j \in \mathbb{Z}}$ является totally положительной.

Замечание 6.20. Totally положительные меры являются log-вогнутыми (см. §6.4). Если M' и M'' — две totally положительные меры, то в силу леммы 6.19 соответствующие тёплицевы матрицы можно перемножать (несмотря на их бесконечный размер). Это соответствует свертке вероятностных мер

$$(M' * M'')(n) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} M'(n-k)M''(k). \quad (6.18)$$

Таким образом, totally положительные меры образуют сверточную полугруппу.

Определение 6.21. Вероятностная мера на $\mathbb{Z}$ однозначно задается своей характеристической функцией (см., напр., [Шир07]), которая определяется следующим образом:

$$\psi(u) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} u^n M(n), \quad u \in \mathbb{T}^1. \quad (6.19)$$

Ряд $\psi(u)$ сходится в кольце вокруг окружности $\mathbb{T}^1 \subset \mathbb{C}$ и определяет голоморфную функцию в этом кольце.

Свертка мер отвечает произведению характеристических функций.

Замечание 6.22. В литературе для функции $\psi(u)$ (6.19), построенной по вероятностной мере $M(n)$ на $\mathbb{Z}$, также используется название *Polya frequency function*.

Шёнберг занимался классификацией totally положительных вероятностных мер в терминах их характеристических функций. Сначала рассмотрим два примера totally положительных мер (ср. с §2.5).

Пример 6.23. Пусть M — мера Бернулли:

$$M(n) := \begin{cases} 1 - \beta, & \text{если } n = 0; \\ \beta, & \text{если } n = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.20)$$

Здесь $0 \leq \beta \leq 1$. Она соответствует тёплицевой матрице вида

$$X = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & 1 - \beta & 0 & 0 & \ddots \\ \ddots & \beta & 1 - \beta & 0 & \ddots \\ \ddots & 0 & \beta & 1 - \beta & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

Ясно, что эта матрица получается из графа, изображенного на рис. 9.⁴⁶ Этот граф удовлетворяет условию (C2) из §6.2, и поэтому мера Бернулли является totally положительной. Характеристическая функция этой меры равна

$$\psi(u) = 1 + \beta(u - 1). \quad (6.22)$$

⁴⁶То, что матрица и граф бесконечны, не имеет значения.

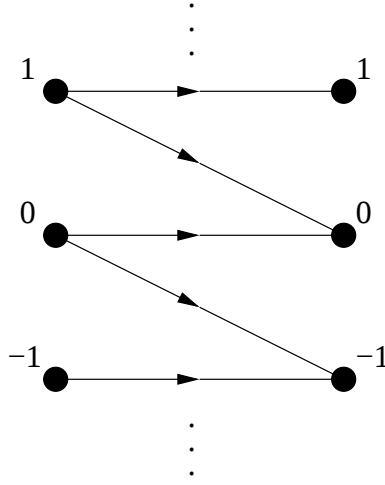


Рис. 9: Граф для тёплицевой матрицы (6.21). Вес каждого горизонтального ребра равен $1 - \beta$, вес каждого наклонного равен β .

Пример 6.24. Пусть теперь M — геометрическое распределение на неотрицательных целых числах:

$$M(n) := \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^n, & \text{если } n \geq 0; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (6.23)$$

Здесь $\alpha \geq 0$. Соответствующая M тёплицева матрица получается из графа, изображенного на рис. 10. Он также удовлетворяет условию (C2) из §6.2: это легко проверяется, а можно также, слегка продеформировав картинку, сделать так, чтобы все стрелки смотрели вправо, так что будет выполнены все условия, указанные в замечании 6.12). Поэтому мера M также totally положительна. Ее характеристическая функция равна

$$\psi(u) = \frac{1}{1 - \alpha(u-1)}. \quad (6.24)$$

Замечание 6.25. Замена $u \mapsto u^{-1}$ в характеристической функции $\psi(u)$ означает отражение меры $M(n)$ относительно нуля, что также приводит к totally положительной мере.

С учетом этого замечания, примеров 6.23 и 6.24, и того, что свертка мер соответствует произведению характеристических функций, получаем, что в качестве характеристических функций totally положительных мер могут выступать любые конечные произведения вида

$$\psi(u) = \frac{\prod (1 + \beta_i^+(u-1))}{\prod (1 - \alpha_i^+(u-1))} \cdot \frac{\prod (1 + \beta_i^-(u^{-1}-1))}{\prod (1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1))} \quad (6.25)$$

(ср. это с функцией Войкулеску (2.33)).

Замечание 6.26. Нетрудно понять, что слабые пределы вероятностных мер на $\mathbb{Z}$ (которые соответствуют равномерной сходимости характеристических функций на $\mathbb{T}^1$) сохраняют totalность.

Рассмотрим последовательность характеристических функций

$$\psi_n(u) := \left(1 + \frac{\gamma}{n}(u-1) \right)^n, \quad \gamma \geq 0. \quad (6.26)$$

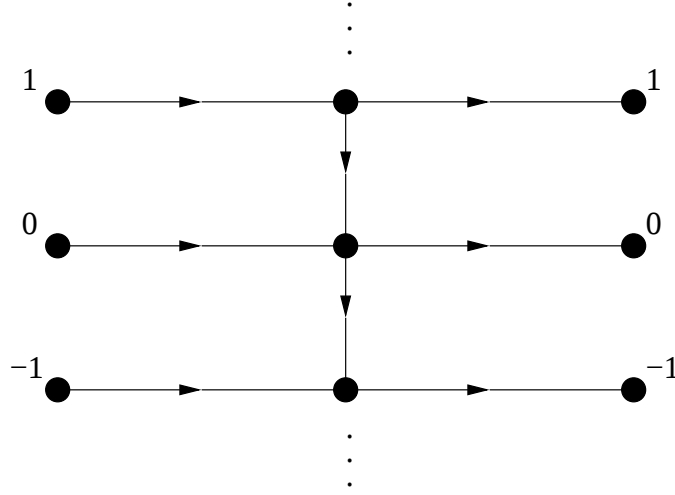


Рис. 10: Граф для тёплицевой матрицы, соответствующей геометрическому распределению. Вес каждого левого горизонтального ребра равен $\frac{1}{1+\alpha}$, вес каждого правого горизонтального ребра равен единице, а вес каждого вертикального ребра равен $\frac{\alpha}{1+\alpha}$.

Характеристическая функция ψ_n получается в результате свертки n одинаковых характеристических функций меры Бернулли с параметром $\beta_n = \frac{\gamma}{n}$.⁴⁷ При $n \rightarrow \infty$ функции ψ_n сходятся (равномерно на $\mathbb{T}^1$) к характеристической функции меры Пуассона $e^{\gamma(u-1)}$. См. также упражнение 6.8.

Таким образом, предельными переходами из характеристических функций вида (6.25) можно получить все функции Войкулеску (2.33):

$$\Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(u) = e^{\gamma^+(u-1) + \gamma^-(u^{-1}-1)} \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \beta_i^+(u-1)}{1 - \alpha_i^+(u-1)} \cdot \frac{1 + \beta_i^-(u^{-1}-1)}{1 - \alpha_i^-(u^{-1}-1)} \right). \quad (6.27)$$

Здесь $\sum \alpha_i^+ + \sum \alpha_i^- + \sum \beta_i^+ + \sum \beta_i^- < \infty$ и $\gamma^\pm \geq 0$.

Шёнберг выдвинул гипотезу, что таким образом записываются все характеристические функции totally positive probability measures.

Замечание 6.27 (Об условии $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$). Условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ возникало, когда мы строили функцию параметры $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$ по регулярной последовательности сигнатур $\lambda(N)$, так что $\alpha^\pm$ и $\beta^\pm$ — предельные модифицированные координаты Фробениуса разбиений $\lambda^\pm$,⁴⁸ а $\gamma^\pm = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\lambda(N)|}{N} - \sum (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm)$ — предельные «дефекты» сигнатур (см. предыдущую лекцию). Действительно, $\beta_1^\pm = \ell(\lambda^\pm) - \frac{1}{2}$, и $\ell(\lambda^+) + \ell(\lambda^-) \leq N$.

В рассуждении Шёнберга условие $\beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1$ само собой не возникает, однако (см. упражнение 2.10) его наложение не сужает множество функций. При его выполнении параметры определены однозначно: если $(\alpha_1^\pm, \beta_1^\pm, \gamma_1^\pm) \neq (\alpha_2^\pm, \beta_2^\pm, \gamma_2^\pm)$, то и соответствующие функции Войкулеску (6.27) различны.

Множество параметров

$$\Omega = \left\{ (\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm) : \sum \alpha_i^+ + \sum \alpha_i^- + \sum \beta_i^+ + \sum \beta_i^- < \infty, \gamma^\pm \geq 0, \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1 \right\} \quad (6.28)$$

⁴⁷В теории вероятностей это соответствует суммированию независимых одинаково распределенных величин.

⁴⁸То есть, $\alpha_i^\pm = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{a_i^\pm(N)}{N}$, $\beta_i^\pm = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b_i^\pm(N)}{N}$.

можно вложить в $\mathbb{R}^{4\infty+2}$, и Ω будет замкнутым локально компактным подмножеством в $\mathbb{R}^{4\infty+2}$ (в топологии покоординатной сходимости).

Пространство Ω можно рассматривать как одну из версий дуального объекта к бесконечномерной унитарной группе $U(\infty)$.

Замечание 6.28. Гипотеза Шёнберга была доказана Эдrei [Edr53] в 1953 г. Сам Шёнберг решил аналогичную задачу, в которой $\mathbb{Z}$ заменено на $\mathbb{R}$. Он рассматривал функции $M(x)$ на $\mathbb{R}$, для которых $X(x, y) := M(x - y)$ — totally положительное ядро (все миноры всех порядков неотрицательны). Ответ дается в похожих терминах, но формулировка отличается.

Замечание 6.29. Результат Шёнберга о totally положительных функциях $M(x)$ можно также сформулировать в терминах теории представлений. Еще одна версия состоит в следующем. Пусть $\mathcal{H}$ — множество всех эрмитовых $\infty \times \infty$ матриц $[A_{ij}]_{i,j=1,2,\dots}$.⁴⁹ На $\mathcal{H}$ действует бесконечномерная унитарная группа $U(\infty)$ по формуле

$$A \mapsto UAU^{-1}, \quad A \in \mathcal{H}, \quad U \in U(\infty). \quad (6.29)$$

Рассмотрим множество $\mathcal{M}(\mathcal{H})^{U(\infty)}$ всех вероятностных мер на $\mathcal{H}$, инвариантных относительно этого действия. Это выпуклое множество, а его крайние точки как раз параметризуют totally положительные функции $M(x)$ на $\mathbb{R}$, из теоремы Шёнберга.⁵⁰

6.6 Упражнения

Упражнение 6.1. Докажите, что матрицы 1 и 2 из примера 6.4 являются totally положительными.

Указание. Можно заметить, что любая подматрица матрицы X имеет тот же самый вид, что и матрица X . Определитель же матрицы X можно вычислить с помощью определителя Коши (5.33).

Упражнение 6.2. Докажите, что матрица 3 из примера 6.4 является totally положительной.

Указание. Используйте многочлены Шура (см., напр., §1.2).

Упражнение 6.3. Докажите предложение 6.5.

Упражнение 6.4. Докажите формулу 6.4.

Указание. Ясно, что если $\#I = 1$, то эта формула верна (это определение произведения матриц). Чтобы доказать формулу для $\#I > 1$, возьмем внешние степени матриц X и Y порядка $\#I$, и рассмотрим их произведение. Матричными элементами этого произведения как раз и будут миноры $|(XY)_{IJ}|$.

Упражнение 6.5. Приведите пример log-вогнутой, но не totally положительной последовательности (см. §6.4).

Упражнение 6.6. Докажите лемму 6.17.

Указание. Представьте матрицу $[cR^{x_i - y_j}]_{i,j=1,\dots,n}$ (где $x_1 < \dots < x_n$, $y_1 < \dots < y_n$) в виде произведения двух диагональных матриц.

Упражнение 6.7. Докажите лемму 6.18.

Упражнение 6.8. Докажите непосредственно, что мера Пуассона на $\mathbb{Z}$ с характеристической функцией $\psi(u) = e^{\gamma(u-1)}$ является totally положительной (см. замечание 6.26).

⁴⁹Условие эрмитовости означает, что $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$ для всех i, j .

⁵⁰Точка p выпуклого множества называется *крайней*, если она не представляется в виде $p = \lambda q_1 + (1 - \lambda)q_2$, где $0 < \lambda < 1$. В случае $\mathcal{M}(\mathcal{H})^{U(\infty)}$ (и во многих других случаях) крайние точки этого множества также называются *эргодическими мерами*.

7 Тотальная положительность и теория представлений

7.1 Введение

Напомним, что в лекциях 1, 2, 3, 4, 5 мы обсуждали теорему Войкулеску 2.21 о классификации экстремальных характеров группы $U(\infty)$. Экстремальный характер бесконечномерной унитарной группы⁵¹ — это центральная функция χ на группе, а в силу определения 2.1 и замечания 2.2 можно считать, что χ — функция на бесконечномерном финитном торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$.⁵² Из теоремы 2.21 следует, что экстремальные характеры являются мультипликативными функциями на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$, то есть, они имеют вид

$$\chi(u_1, u_2, \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} \Psi(u_i), \quad (7.1)$$

где $(u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ и $\Psi(u) = \Psi_{\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm}(u)$ — функция Войкулеску на $\mathbb{T}^1$ (2.33), $\Psi(1) = 1$.

Также в лекции 6 мы обсуждали тотально положительные последовательности $M(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ (см. определение 6.16) и задачу их классификации. Рассматривались тотально положительные последовательности, которые нормированы так, чтобы $\sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n) = 1$ (см. леммы 6.17 и 6.18). Оказалось, что характеристические функции $\psi(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n)u^n$, $u \in \mathbb{T}^1$, таких последовательностей — это в точности функции Войкулеску (2.33).

В этой лекции мы покажем, как задача классификации тотально положительных матриц возникает из теории представлений группы $U(\infty)$. При этом мы будем рассуждать, используя как можно меньше конкретных сведений о функциях Шура и функциях Войкулеску. Приведем краткий план наших рассуждений.

1. Функциональное уравнение для нормированных характеров компактной группы.
2. Асимптотическое функциональное уравнение для экстремальных характеров χ группы $U(\infty)$.
3. Из асимптотического функционального уравнения для χ следует, что χ мультипликативна на торе $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$:

$$\chi(u_1, u_2, \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} \Psi(u_i), \quad (u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty.$$

4. Рассмотрим коэффициенты разложения $\Psi(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M(n)u^n$. Тогда $M(n)$ — тотально положительная последовательность.

Большая часть лекции посвящена обсуждению п. 3.

7.2 Функциональное уравнение для нормированных характеров

Пусть G — компактная группа (в нашем случае это $U(N)$), и T — ее неприводимое конечномерное представление (см. определение 1.12). Без ограничения общности можно считать, что T — унитарное представление, то есть, что все операторы $T(g)$, $g \in G$ унитарны. Нормированный характер представления T — это функция на группе, определяемая как

$$\chi(g) = \frac{\text{Tr } T(g)}{\dim T}, \quad (7.2)$$

⁵¹См. определения 2.7 и 2.8.

⁵²Тор $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$ состоит из последовательностей $(u_1, u_2, \dots)$, $u_i \in \mathbb{T}^1$, в которых лишь конечное число координат отлично от единицы (см. определение 2.6). Тогда $\chi(U) = \chi(u_1, u_2, \dots)$, где $U \in U(\infty)$ и $u_1, u_2, \dots$ — собственные значения матрицы U . Здесь χ обозначает одновременно и функцию на $U(\infty)$, и функцию на $\mathbb{T}_{\text{fin}}^\infty$. Мы не различаем эти объекты. См. также замечание 1.13.

где $\dim T$ — размерность пространства представления T (или, говоря короче, размерность представления T). Характер является центральной функцией.

Нормированные неприводимые характеры группы $U(N)$ — это в точности нормированные многочлены Шура $\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N)$, где λ пробегает все сигнатуры длины N (характер мы рассматриваем как функцию на $\mathbb{T}^N$, см. замечание 1.13). См. также §1.4.

Предложение 7.1 (Функциональное уравнение для нормированных характеров). *Пусть T — неприводимое унитарное конечномерное представление G , χ — его характер, и $g_1, g_2 \in G$. Тогда*

$$\int_{h \in G} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \chi(g_1) \chi(g_2). \quad (7.3)$$

Здесь интегрирование ведется по нормированной мере Хаара на группе G (см. §1.4).

До конца данного подраздела мы доказываем это предложение.

Замечание 7.2. Если группа G коммутативна, то, как известно, все ее неприводимые конечномерные представления одномерны (упражнение 7.1). Нормированные неприводимые характеры χ в этом случае суть гомоморфизмы $\chi: G \rightarrow U(1) = \mathbb{T}^1$, то есть, $\chi(g_1 g_2) = \chi(g_1) \chi(g_2)$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Ясно, что это частный случай предложения 7.1.

Доказательство предложения 7.1 использует известную *лемму Шура*. Сначала дадим следующее определение.

Определение 7.3. Пусть T — конечномерное унитарное представление компактной группы G . *Коммутант* представления T состоит из всех операторов A в пространстве представления, коммутирующих с T :

$$T' := \{A: A = T(g)AT(g)^{-1}, \forall g \in G\}. \quad (7.4)$$

Лемма 7.4 (Шур). *Если представление T в определении 7.3 неприводимо, то его коммутант состоит только из скалярных операторов.*⁵³

Доказательство этой леммы можно найти во многих книгах по теории представлений.

Теперь приступим к доказательству предложения 7.1. Определим оператор усреднения

$$\overset{\circ}{T}(g) := \int_{h \in G} T(hgh^{-1}) dh = \int_{h \in G} T(h)T(g)T(h)^{-1} dh. \quad (7.5)$$

Легко видеть, что $\overset{\circ}{T} \in T'$, и по лемме Шура, $\overset{\circ}{T}$ — скалярный оператор. Так как $\overset{\circ}{T}(e) = 1$, то $\overset{\circ}{T}(g) = \chi(g)1$ для всех $g \in G$ (напомним, что χ — нормированный характер представления T). Теперь мы можем записать

$$\begin{aligned} \int_{h \in G} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh &= (\dim T)^{-1} \int_{h \in G} \text{Tr } T(g_1 h g_2 h^{-1}) dh \\ &= (\dim T)^{-1} \int_{h \in G} \text{Tr } (T(g_1)T(hg_2h^{-1})) dh \\ &= (\dim T)^{-1} \text{Tr} \left(T(g_1) \int_{h \in G} T(hg_2h^{-1}) dh \right) \\ &= (\dim T)^{-1} \text{Tr} \left(T(g_1) \overset{\circ}{T}(g_2) \right) \\ &= \chi(g_1) \chi(g_2). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что можно переставить взятие следа и интегрирование.

Предложение 7.1 доказано.

⁵³Напомним, что скалярным называется оператор вида $c1$, $c \in \mathbb{C}$, где 1 — тождественный оператор.

7.3 Асимптотическое функциональное уравнение

Пусть теперь χ_N для каждого N — неприводимый нормированный характер группы $U(N)$, и пусть последовательность $\{\chi_N\}$ сходится (в смысле определения 2.7) к некоторой функции χ на $U(\infty)$.⁵⁴ Согласно определению 2.8, χ — экстремальный характер $U(\infty)$.

Так как на $U(\infty)$ нет меры Хаара (в силу некомпактности этой группы), мы не можем написать функциональное уравнение для характеров (предложение 7.1). Однако мы можем использовать тот факт, что $U(\infty)$ аппроксимируется компактными группами $U(N)$ (см. определение 2.1).

Предложение 7.5 (Асимптотическое функциональное уравнение). *Пусть χ — экстремальный характер $U(\infty)$, $g_1, g_2 \in U(\infty)$. Тогда*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{h \in U(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \chi(g_1) \chi(g_2). \quad (7.7)$$

Здесь интегрирование ведется по мере Хаара на $U(N)$.

Доказательство. Это предложение напрямую следует из функционального уравнения для нормированных характеров $U(N)$ (предложение 7.1) и определения экстремального характера (см. определения 2.7 и 2.8).

Пусть χ — наш экстремальный характер и $\chi_N \rightarrow \chi$ в смысле определения 2.7. Запишем функциональное уравнение для нормированных характеров группы $U(N)$:

$$\int_{h \in U(N)} \chi_N(g_1 h g_2 h^{-1}) dh = \chi_N(g_1) \chi_N(g_2). \quad (7.8)$$

Из определения сходимости $\chi_N \rightarrow \chi$ ясно, что она влечет поточечную сходимость на $U(\infty)$, поэтому правая часть (7.8) сходится при $N \rightarrow \infty$ к $\chi(g_1) \chi(g_2)$.

Теперь нам надо показать, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{h \in U(N)} |\chi_N(g_1 h g_2 h^{-1}) - \chi(g_1 h g_2 h^{-1})| dh = 0. \quad (7.9)$$

□

Это утверждение не очевидно, поскольку мы знаем, что сходимость $\chi_N \rightarrow \chi$ равномерна на фиксированных подгруппах $U(n)$, тогда как здесь подгруппы $U(N)$ растут. Тем не менее, эту трудность можно преодолеть, воспользовавшись леммой 7.14 (упражнение 7.3).

7.4 Мультипликативность на классах сопряженности

В этом подразделе мы увидим, что можно сказать о центральной функции χ на $U(\infty)$, если она удовлетворяет асимптотическому функциональному уравнению (7.7).

Пусть $g \in U(\infty)$. Заметим, что g можно понимать как конечную матрицу, так как g имеет вид (2.2). Через $[g]$ обозначим класс сопряженности $g \in U(\infty)$.

Определение 7.6. Пусть Γ — совокупность всех классов сопряженности в $U(\infty)$. Множество Γ можно понимать как множество неупорядоченных конечных наборов вида $\{u_1, \dots, u_n\}$ любого размера (где $u_i \in \mathbb{T}^1$), с отношением эквивалентности

$$\{u_1, \dots, u_n\} \sim \{u_1, \dots, u_n, 1\}. \quad (7.10)$$

⁵⁴Можно было бы вместо χ_N писать $\tilde{s}_{\lambda(N)}$, но в данной лекции мы хотим как можно реже использовать конкретный вид неприводимых нормированных характеров групп $U(N)$, и поэтому мы пишем χ_N .

На Γ можно ввести структуру коммутативной полугруппы. Если $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, то положим

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 := \gamma_1 \sqcup \gamma_2 \quad (7.11)$$

(дизъюнктное объединение наборов γ_1 и γ_2). Ясно, что эта операция коммутативна.

На уровне матриц эта операция выглядит следующим образом (здесь мы считаем элементы $U(\infty)$ матрицами конечного размера):

$$[g_1] \circ [g_2] := \left[\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \right]. \quad (7.12)$$

Обозначим последнюю матрицу через $g_1 \oplus g_2$.

В этом подразделе мы докажем следующую теорему:

Теорема 7.7. *Пусть центральная функция χ на $U(\infty)$ удовлетворяет асимптотическому функциональному уравнению (7.7). Тогда χ мультипликативна на классах сопряженности.⁵⁵*

$$\chi(\gamma_1 \circ \gamma_2) = \chi(\gamma_1)\chi(\gamma_2), \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma. \quad (7.13)$$

Замечание 7.8. • Разумеется, эта теорема вытекает из теоремы 2.21 о классификации экстремальных характеров группы $U(\infty)$. Однако оказывается, что ее можно установить, не используя конкретный вид многочленов Шура.

- Мультипликативность χ на классах сопряженности — это специфически бесконечномерный факт, который для групп $U(N)$ не имеет места. В этом проявляется то, что группа $U(\infty)$ одновременно и проще, и сложнее, чем группы $U(N)$.

Замечание 7.9. Теорема 7.7 верна не только для $U(\infty)$, но и для других бесконечномерных классических групп — $O(\infty)$ и $Sp(2\infty)$. Она также верна и для бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}(\infty)$. Для большей наглядности мы сначала проведем рассуждение применительно к группе $\mathfrak{S}(\infty)$, а затем перейдем к интересующему нас случаю $U(\infty)$.

7.4.1 Теорема 7.7 для бесконечной симметрической группы

Здесь мы докажем аналог теоремы 7.7 для бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}(\infty)$. Пусть $\mathfrak{S}(N)$ — симметрическая группа N -й степени. Ее можно вложить в $U(N)$, сопоставив каждому элементу $s \in \mathfrak{S}(N)$ матрицу перестановки s . Она состоит из нулей и единиц, и в каждой строке и каждом столбце стоит только одна единица. Группа $\mathfrak{S}(\infty)$ определяется аналогично $U(\infty)$ как $\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{S}(N)$. Поэтому можно считать, что группа $\mathfrak{S}(\infty)$ вложена в $U(\infty)$. Здесь мы докажем следующее предложение:

Предложение 7.10. *Пусть $\chi: \mathfrak{S}(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ — центральная функция, для которой*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N!} \sum_{g \in \mathfrak{S}(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) = \chi(g_1)\chi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(\infty). \quad (7.14)$$

Тогда χ мультипликативна на классах сопряженности в $\mathfrak{S}(\infty)$, то есть,

$$\chi([g_1] \circ [g_2]) = \chi([g_1])\chi([g_2]), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(\infty). \quad (7.15)$$

Замечание 7.11. Суммирование в (7.14) — это на самом деле интеграл по мере Хаара на $\mathfrak{S}(N)$, которая представляет собой равномерную меру на $\mathfrak{S}(N)$ (вес каждой перестановки равен $\frac{1}{N!}$).

⁵⁵Центральная функция на $U(\infty)$ — это фактически функция на Γ .

Замечание 7.12. Предложение 7.10 на самом деле представляет собой «комбинаторный скелет» теоремы 7.7, и оба эти утверждения доказываются аналогично.

Доказательство. Фиксируем $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(\infty)$ и пусть выполнено (7.14). Выберем и зафиксируем достаточно большое n , такое что $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(n)$. Далее предполагаем $N \geq 2n$. Рассмотрим сумму

$$\frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}). \quad (7.16)$$

Напомним, что мы понимаем элементы симметрических групп (перестановки) как матрицы. Представим матрицу h в блочном виде

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

где матрица a имеет формат $n \times n$ (а матрица h — формат $N \times N$).⁵⁶ Ясно, что

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

где a' означает транспонирование. Перестановки $g_1, g_2 \in \mathfrak{S}(n)$ представим $N \times N$ матрицами $\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, соответственно.

Рассмотрим класс сопряженности

$$[g_1 h g_2 h^{-1}] = \left[\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right]. \quad (7.19)$$

Ясно, что этот класс не меняется при преобразованиях h вида

$$h \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathfrak{S}(N - n). \quad (7.20)$$

Поэтому класс сопряженности (7.19) зависит только от двойного класса смежности

$$\mathfrak{S}_n(N) h \mathfrak{S}_n(N) \in \mathfrak{S}_n(N) \backslash \mathfrak{S}(N) / \mathfrak{S}_n(N), \quad (7.21)$$

где $\mathfrak{S}_n(N)$ — подгруппа в $\mathfrak{S}(N)$, которая оставляет на месте $1, 2, \dots, n$, или, что то же самое,

$$\mathfrak{S}_n(N) := \left\{ \begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(N) \right\} \cong \mathfrak{S}(N - n). \quad (7.22)$$

Обозначим

$$w_n := \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}(2n) \subset \mathfrak{S}(N) \quad (7.23)$$

(напомним, что $N \geq 2n$). Это матрица формата $2n \times 2n$.

Заметим, что

- $g_1 w_n g_2 w_n^{-1} = g_1 \oplus g_2$.
- $\chi(g_1 h g_2 h^{-1}) = \chi(g_1 \oplus g_2) = \chi([g_1] \circ [g_2])$ для всех $h \in \mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N)$, так как χ зависит от h только через двойной класс смежности h вида $\mathfrak{S}_n(N) h \mathfrak{S}_n(N)$.

⁵⁶Здесь и далее до конца лекции все матрицы, записанные в блочном виде будут иметь такой формат, если не оговорено противное.

Запишем левую часть (7.14) следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) \\
&= \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) + \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}(N) \setminus (\mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N))} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) \\
&= \chi([g_1] \circ [g_2]) \cdot \frac{\#(\mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N))}{N!} + \frac{1}{N!} \sum_{h \in \mathfrak{S}(N) \setminus (\mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N))} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}).
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Мы знаем из (7.14), что это выражение сходится к $\chi(g_1)\chi(g_2)$ (или, что то же самое, к $\chi([g_1])\chi([g_2])$), а также что $|\chi| \leq 1$, поэтому предложение 7.10 следует из леммы 7.13 ниже. $\square$

Лемма 7.13. Пусть n фиксировано, а $w_n \in \mathfrak{S}(N)$ определено по формуле (7.23) выше. Тогда⁵⁷

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#(\mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N))}{\#\mathfrak{S}(N)} = 1. \tag{7.25}$$

Доказательство. Условие

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n(N) w_n \mathfrak{S}_n(N) \tag{7.26}$$

(здесь, как и раньше, матрица h имеет формат $N \times N$, а подматрица a — формат $n \times n$) выполняется тогда и только тогда, когда $a = 0$. Вспоминая, что h является перестановкой множества $\{1, \dots, N\}$, мы можем записать последнее условие в виде

$$\{h(i) > n \text{ для всех } i = 1, \dots, n\}. \tag{7.27}$$

Будем интерпретировать h как случайную перестановку. Легко видеть, что при фиксированном n и $N \rightarrow \infty$ вероятность события (7.27) стремится к 1. $\square$

Таким образом, предложение 7.10 доказано.

7.4.2 Теорема 7.7 для бесконечномерной унитарной группы

Доказательство теоремы 7.7 для бесконечномерной унитарной группы следует той же идее и лишь немного технически сложнее.

Пусть χ — центральная функция на $U(\infty)$, удовлетворяющая асимптотическому функциональному уравнению (7.7), и пусть $g_1, g_2 \in U(\infty)$. Зафиксируем достаточно большое n , такое, что $g_1, g_2 \in U(n)$. Мы знаем из предложения 7.5, что

$$\chi(g_1)\chi(g_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{h \in U(N)} \chi(g_1 h g_2 h^{-1}) dh, \tag{7.28}$$

где интегрирование ведется по мере Хаара на $U(N)$.

Возьмем $N \geq 2n$, потом N будет стремиться к бесконечности. Каждую матрицу $h \in U(N)$ снова представим в виде

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{7.29}$$

где a имеет формат $n \times n$. Мы знаем, что h можно подвергать преобразованиям вида

$$h \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad u, v \in U(N - n), \tag{7.30}$$

⁵⁷Напомним, что подгруппа $\mathfrak{S}_n(N) \subset \mathfrak{S}(N)$ определяется по формуле (7.22).

и от этого значение $\chi(g_1 h g_2 h^{-1})$ не изменится. Поэтому χ зависит от h только через двойной смежный класс

$$U_n(N) h U_n(N) \in U_n(N) \backslash U(N) / U_n(N), \quad (7.31)$$

где $U_n(N)$ определяется аналогично $\mathfrak{S}_n(N)$ (7.22).

Лемма 7.14. *Всякий смежный класс $U_n(N) h U_n(N)$ пересекается с $U(2n) \subset U(N)$, то есть,*

$$U(N) = U_n(N) U(2n) U_n(N). \quad (7.32)$$

Доказательство. Упражнение 7.2. □

Определение 7.15. Положим для всех $N \geq n$ и $\varepsilon > 0$

$$A(n, N, \varepsilon) := \left\{ h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(N) : \|a\| \leq \varepsilon \right\} \subset U(N). \quad (7.33)$$

Здесь $\|a\|$ — обычная норма матрицы a .

Лемма 7.16. *Пусть $w_n \in U(2n) \subset U(N)$ определяется по формуле (7.23). Если $h \in A(n, N, \varepsilon)$, то в двойном классе $U_n(N) h U_n(N)$ найдется элемент из $U(2n)$, ε -близкий к w_n .*

Доказательство. Упражнение 7.5. □

Оставшаяся часть доказательства теоремы 7.7 проводится так же, как для случая симметрической группы. Для завершения доказательства теоремы 7.7 нам остается только установить следующий факт:

Лемма 7.17. *Пусть $\text{Haar}_{U(N)}$ — нормированная мера Хаара группы $U(N)$. Тогда*

$$\text{Haar}_{U(N)}(A(n, N, \varepsilon)) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty \quad (7.34)$$

для всех фиксированных n и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Нам надо показать, что у случайной матрицы, выбранной по мере Хаара на $U(N)$, левый верхний блок размера $n \times n$ с большой вероятностью имеет маленькую норму. Достаточно доказать это для $n = 1$ (упражнение 7.6).

Теперь рассмотрим первую строку матрицы из $U(N)$, пусть она состоит из чисел $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$. Это точка на сфере $S^{2N-1} \subset \mathbb{R}^{2N}$. Мера Хаара, спроектированная на первую строчку матрицы, представляет собой равномерную меру на сфере S^{2N-1} (упражнение 7.7). Нам надо показать, что по равномерной мере на сфере S^{2N-1} величина $|z_1|$ мала с большой вероятностью. Аналогично, вместо $|z_1|$ достаточно доказать то же самое для $\text{Re } z_1$.

Из упражнения 7.8 мы знаем распределение величины $\text{Re } z_1$, которое имеет плотность $\text{Const} \cdot (1 - x^2)^{\frac{2N-3}{2}} dx$, и при $N \rightarrow \infty$ стремится к дельта-мере в нуле, то есть, с большой вероятностью величина $\text{Re } z_1$ попадает в ε -окрестность нуля.

Лемма доказана. □

Таким образом, мы доказали теорему 7.7.

7.5 Связь с тотальной положительностью

В этом подразделе мы покажем, как связана мультипликативность экстремальных характеров группы $U(\infty)$ на классах сопряженности (которую мы получили, не используя конкретный вид функций Шура и теорему 2.21 о классификации экстремальных характеров) с понятием тотальной положительности.

Рассмотрим пространство $L^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}}$ функций, которые квадратично интегрируемы по мере Хаара на $U(N)$ и инвариантны относительно действия группы $U(N)$ на себе сопряжениями.⁵⁸ Согласно известному общему факту, неприводимые (*не нормированные!*) характеры составляют в пространстве $L^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}}$ ортонормированный базис. Для любой функции $\varphi \in L^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}}$ можно рассмотреть ее разложение по неприводимым характерам, которое в случае группы $U(N)$ имеет вид

$$\varphi(u_1, \dots, u_N) = \sum_{\mu \in \text{Sign}(N)} c_\mu s_\mu(u_1, \dots, u_N), \quad c_\mu = (\varphi, s_\mu). \quad (7.35)$$

Определение 7.18. Через $L_+^2(U(N)) := L_+^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}} \subset L^2(U(N), \text{Haar}_{U(N)})^{\text{inv}}$ обозначим подпространство тех функций φ , для которых все $c_\mu \geq 0$, то есть,

$$(\varphi, s_\mu) \geq 0 \quad \text{для всех } \mu \in \text{Sign}(N). \quad (7.36)$$

Далее, для любых $N \geq n$ и $\lambda \in \text{Sign}(N)$ выполнено

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_n, 1, \dots, 1) \in L_+^2(U(n)). \quad (7.37)$$

Действительно, это вытекает из правила ветвления лорановских многочленов Шура (§1.5):

$$s_\lambda(u_1, \dots, u_N)|_{u_N=1} = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} s_\mu(u_1, \dots, u_{N-1}). \quad (7.38)$$

Видно, что если применить это правило $(N - n)$ раз к $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$, то получим линейную комбинацию многочленов s_μ ($\mu \in \text{Sign}(n)$) с целыми неотрицательными коэффициентами.

Согласно определениям 2.7 и 2.8, это означает, что для любого экстремального характера χ группы $U(\infty)$ и любого фиксированного n имеем

$$\chi|_{U(n)} \in L_+^2(U(n)). \quad (7.39)$$

Из теоремы 7.7 следует, что χ — мультипликативная функция, то есть,

$$\chi|_{U(n)}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n \Psi(u_i) \quad \text{для всех } n, \quad (7.40)$$

где Ψ — непрерывная функция на $\mathbb{T}^1$. Конкретный вид функции Ψ мы предполагаем неизвестным. Разложим Ψ в ряд Фурье:

$$\Psi(u) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} M(l) u^l, \quad u \in \mathbb{T}^1. \quad (7.41)$$

Как мы знаем, $\Psi(u_1) \dots \Psi(u_n)$ — функция из $L_+^2(U(n))$. Разложим симметрическую по $u_1, \dots, u_n$ функцию $\Psi(u_1) \dots \Psi(u_n)$ в ряд по функциям Шура. Мы получим, переобозначив μ через λ (упражнение 7.9)

$$\Psi(u_1) \dots \Psi(u_n) = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(n)} c_\lambda s_\lambda(u_1, \dots, u_n), \quad c_\lambda = \det [M(\lambda_i - i + j)]_{i,j=1}^n. \quad (7.42)$$

Таким образом, из того, что для всех n функция $\chi|_{U(n)}$ лежит в $L_+^2(U(n))$, следует, что все определители вида $\det [M(\lambda_i - i + j)]_{i,j=1}^n$ неотрицательны для всех $\lambda \in \text{Sign}(n)$. Меняя i и j , получаем, что это равносильно неотрицательности определителей вида

$$\det [M(i - (j - \lambda_j))]_{i,j=1}^n, \quad \lambda \in \text{Sign}(n). \quad (7.43)$$

⁵⁸Инвариантность означает, что функции постоянны на классах сопряженности.

Построим тёплицеву матрицу (см. определение 6.14) по последовательности $M(l)$:

$$X_{ij} = M(i - j). \quad (7.44)$$

Это бесконечная в обе стороны матрица. Напомним, что последовательность $M(l)$, $l \in \mathbb{Z}$ является totally положительной, если все миноры всех порядков матрицы X неотрицательны.

Из наших рассуждений пока можно заключить, что миноры $|X_{IJ}|$ неотрицательны для $I = \{1, \dots, n\} + k$ ($k \in \mathbb{Z}$) и любого J ,⁵⁹ то есть, в I индексы должны идти подряд. Оказывается, можно проделать некую техническую работу и заключить, что из неотрицательности таких миноров матрицы X уже следует ее totalная положительность.

7.6 Упражнения

Упражнение 7.1. Покажите, что все неприводимые конечномерные представления коммутативной группы одномерны.

Упражнение 7.2. Докажите лемму 7.14.

Указание. Воспользуйтесь линейной алгеброй.

Упражнение 7.3. Завершите доказательство предложения 7.5.

Упражнение 7.4. Завершите доказательство леммы 7.13.

Упражнение 7.5. Докажите лемму 7.16.

Указание. Используйте соотношения между блоками матрицы h , вытекающие из ее унитарности: $aa^* + bb^* = 1$, $a^*a + c^*c = 1$ и т. д.

Упражнение 7.6. Проверьте, что лемма 7.17 действительно вытекает из того, что

$$\text{Haar}_{U(N)}(A(1, N, \varepsilon)) \rightarrow 1, \quad N \rightarrow \infty \quad (7.45)$$

для всех $\varepsilon > 0$.

Упражнение 7.7. Покажите, что первая строка случайной матрицы из $U(N)$, распределенной по мере Хаара, имеет равномерное распределение на сфере S^{2N-1} .

Упражнение 7.8. Рассмотрим равномерную меру на $(k-1)$ -мерной сфере в $\mathbb{R}^k$:

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 = 1. \quad (7.46)$$

Тогда распределение координаты x_1 имеет плотность

$$\text{Const} \cdot (1 - x_1^2)^{\frac{k-3}{2}} dx_1. \quad (7.47)$$

Другими словами, (7.47) задает плотность проекции равномерной меры на сфере S^{k-1} на ее диаметр. Отметим, что при $k = 3$ (что соответствует обычной двумерной сфере) проекция равномерной меры на диаметр имеет постоянную плотность.

Упражнение 7.9. Докажите формулу (7.42).

Указание. Воспользуйтесь замечанием 1.11.

8 Граф Гельфанда-Цетлина

В этой лекции мы дадим еще одну интерпретацию теоремы 2.21 о классификации экстремальных характеров группы $U(\infty)$, на этот раз в чисто комбинаторных терминах.

⁵⁹Слагаемое k возникает из тёплицевости матрицы X , так что I можно сдвигать на целое число.

8.1 Гармонические функции

Определение 8.1 (Граф Гельфанда-Цетлина). Вершинами *графа Гельфанда-Цетлина* являются все сигнатуры любой длины:

$$\text{Sign} = \bigsqcup_{N=0}^{\infty} \text{Sign}(N). \quad (8.1)$$

Напомним, что $\text{Sign}(N)$ обозначает множество сигнатур длины N .⁶⁰ Удобно считать, что множество $\text{Sign}(0)$ состоит из одной вершины $\emptyset$. Ясно, что для $N \geq 1$ множество $\text{Sign}(N)$ уже является счетным.

Ребра в графе Гельфанда-Цетлина соединяют пары сигнатур μ, λ , таких, что $\mu \prec \lambda$. По определению это означает, что $\mu \in \text{Sign}(N-1)$ и $\lambda \in \text{Sign}(N)$ для некоторого $N \geq 2$, и сигнатуры λ и μ перемежаются, то есть, $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \mu_{N-1} \geq \lambda_N$. Также удобно считать, что вершина $\emptyset$ соединена ребром со всеми вершинами из $\text{Sign}(1)$.

Ясно, что граф Гельфанда-Цетлина связан и не имеет висячих вершин. Кроме того, из любой вершины λ выходит счетное число ребер «вверх» и конечное число ребер «вниз», см. рис. 11.⁶¹

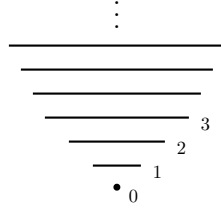


Рис. 11: Этажи графа Гельфанда-Цетлина

Определение 8.2. Через Φ обозначим множество всех функций $\varphi: \text{Sign} \rightarrow \mathbb{R}$ на графе Гельфанда-Цетлина, таких, что

- (*неотрицательность*) $\varphi(\lambda) \geq 0$ для всех $\lambda \in \text{Sign}$;
- (*нормировка*) $\varphi(\emptyset) = 1$;
- (*условие гармоничности*) Для всех $\mu \in \text{Sign}$ выполнено

$$\varphi(\mu) = \sum_{\lambda: \lambda \succ \mu} \varphi(\lambda). \quad (8.2)$$

Пример 8.3. Например, если в (8.2) положить $\mu = \emptyset$, получим

$$\sum_{\lambda \in \text{Sign}(1)} \varphi(\lambda) = 1. \quad (8.3)$$

Заметим, что $\text{Sign}(1)$ можно отождествить с $\mathbb{Z}$. Если же в (8.2) $\mu \in \text{Sign}(1) = \mathbb{Z}$, то получим такое условие:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2: \lambda_1 \geq \mu \geq \lambda_2} \varphi((\lambda_1, \lambda_2)) = \varphi(\mu). \quad (8.4)$$

Ясно, что в условии гармоничности (8.2) всегда участвуют бесконечные суммы, однако в силу неотрицательности φ с ними не возникает проблем.

⁶⁰См. определение 1.3.

⁶¹Другими словами, для любого λ множество $\{\nu: \nu \succ \lambda\}$ счетно, а множество $\{\mu: \mu \prec \lambda\}$ — конечно.

Определение 8.4. *Путь* в графе Гельфанда-Цетлина называется конечная или бесконечная последовательность сигнатур вида

$$\tau = \{\emptyset = \lambda^0 \prec \lambda^1 \prec \lambda^2 \prec \dots\}. \quad (8.5)$$

Ясно, что $\lambda^k \in \text{Sign}(k)$. Если путь τ конечен, через $\text{end}(\tau)$ будем обозначать его конец.

Для сигнатуры λ положим $T_\lambda := \{\tau : \text{end}(\tau) = \lambda\}$. Это множество всех путей из $\emptyset$ в λ , оно конечно. Число элементов в T_λ обозначим через $\text{Dim}\lambda$. Оказывается, эта функция нам уже встречалась (см., например, §2.4).

Замечание 8.5. Путь в графе Гельфанда-Цетлина — это то же самое, что схема Гельфанда-Цетлина (определение 1.25). Если конец пути есть $\lambda \in \text{Sign}(N)$, то схема Гельфанда-Цетлина представляет собой треугольник из целых чисел вида

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \dots & & \lambda_N \\ & * & & * & & \dots & & * & \\ & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ & & & * & & * & & & \\ & & & & * & & & & \end{array} \quad (8.6)$$

Каждые две последовательные строки в этом треугольнике перемежаются.

Предложение 8.6. Пусть $\varphi \in \Phi$, тогда

$$\sum_{\lambda: \lambda \in \text{Sign}(N)} \varphi(\lambda) \text{Dim}\lambda = 1 \quad \text{для всех } N = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7)$$

Доказательство. По индукции. Для $N = 0$ (8.7) верно по определению, для $N = 1$ это следует напрямую из условия гармоничности, см. пример 8.3.

Теперь пусть $\mu \in \text{Sign}(N - 1)$. Перепишем условие гармоничности (8.2) в виде⁶²

$$\varphi(\mu) \text{Dim}\mu = \sum_{\lambda: \lambda \succ \mu} \frac{\text{Dim}\mu}{\text{Dim}\lambda} \cdot \varphi(\lambda) \text{Dim}\lambda. \quad (8.8)$$

Из определения числа путей $\text{Dim}\lambda$ очевидно следует, что

$$\text{Dim}\lambda = \sum_{\mu: \mu \prec \lambda} \text{Dim}\mu. \quad (8.9)$$

Положим

$$p(\lambda \rightarrow \mu) := \begin{cases} \frac{\text{Dim}\mu}{\text{Dim}\lambda}, & \text{если } \mu \prec \lambda; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8.10)$$

Из (8.9) следует, что

$$\sum_{\mu: \mu \in \text{Sign}(N-1)} p(\lambda \rightarrow \mu) = 1 \quad \text{для всех } \lambda \in \text{Sign}(N). \quad (8.11)$$

Обозначим $\tilde{\varphi}(\lambda) := \varphi(\lambda) \text{Dim}\lambda$, тогда (8.8) переписывается в виде

$$\tilde{\varphi}(\mu) = \sum_{\lambda: \lambda \succ \mu} \tilde{\varphi}(\lambda) p(\lambda \rightarrow \mu). \quad (8.12)$$

⁶²Здесь используется, что $\text{Dim}\lambda > 0$ для всех сигнатур λ .

Запишем, пользуясь предположением индукции:

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{\mu \in \text{Sign}(N-1)} \tilde{\varphi}(\mu) = \sum_{\mu \in \text{Sign}(N-1)} \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{\varphi}(\lambda) p(\lambda \rightarrow \mu) \\
&= \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{\varphi}(\lambda) \sum_{\mu \in \text{Sign}(N-1)} p(\lambda \rightarrow \mu) = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{\varphi}(\lambda).
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Здесь мы воспользовались определением чисел $p(\lambda \rightarrow \mu)$, это позволило заменить суммирование по $\{\lambda: \lambda \succ \mu\}$ на суммирование по всем $\lambda \in \text{Sign}(N)$, поэтому можно было переставить суммирование по μ и по λ . $\square$

Замечание 8.7. С точки зрения теории вероятностей $p(\lambda \rightarrow \mu)$ можно рассматривать как *марковское переходное ядро*.

8.2 Центральные меры на путях

Через $T(N)$ обозначим множество всех путей длины N в графе Гельфанда-Цетлина, то есть,

$$T(N) := \{\tau: \text{end}(\tau) \in \text{Sign}(N)\}. \tag{8.14}$$

Другими словами, $T(N)$ — множество схем Гельфанда-Цетлина высоты N . Через $T(\infty)$ обозначим множество всех бесконечных (монотонных) путей в графе Гельфанда-Цетлина.

Ясно, $T(\infty)$ есть проективный предел $\varprojlim T(N)$ относительно проекций $T(N) \rightarrow T(N-1)$, состоящих в «откусывании» от пути $\tau \in T(N)$ последней вершины λ^N , или, что то же самое, в стирании верхней строчки в схеме Гельфанда-Цетлина.

Таким образом, мы получаем канонические проекции $T(\infty) \rightarrow T(N)$ для всех N . Пусть $\tau \in T(N)$. Через $\text{Cyl}(\tau)$ обозначим прообраз τ при этой проекции. Другими словами, $\text{Cyl}(\tau)$ — это множество всех бесконечных путей в графе, начало которых совпадает с τ , или множество бесконечных схем Гельфанда-Цетлина с фиксированным начальным треугольником высоты N .⁶³ Множество $\text{Cyl}(\tau)$ называется *цилиндрическим*. Множество бесконечных путей $T(\infty)$ снабдим σ -алгеброй, порожденной всеми цилиндрическими множествами.

Определение 8.8. Вероятностная мера P на $T(\infty)$ называется *центральной*, если для любого конечного пути τ значение меры P на цилиндрическом множестве $\text{Cyl}(\tau)$ зависит только от конечной вершины $\text{end}(\tau)$.

Замечание 8.9. Вероятностную меру на $T(\infty)$ можно рассматривать как закон распределения случайного бесконечного пути в графе. Также можно спроектировать меру на $T(N)$ для любого N и рассматривать случайный конечный путь длины N . Легко видеть (упражнение 8.1), что условие центральности меры P на $T(\infty)$ в терминах случайных путей эквивалентно следующему условию:

Для всякого N и $\lambda \in \text{Sign}(N)$ распределение случайного пути длины N при условии, что он проходит через вершину λ , является равномерным.⁶⁴

Замечание 8.10. Условие центральности меры на $T(\infty)$ играет важную роль. В разных контекстах оно может также называться *гиббсовостью* или *перестановочностью* (*exchangeability*).

Предложение 8.11. Существует биекция $\varphi \leftrightarrow P$ между множеством Φ (см. определение 8.2) и множеством всех центральных вероятностных мер на $T(\infty)$. Она задается следующим образом:

$$\varphi(\text{end}(\tau)) = P(\text{Cyl}(\tau)) \quad \text{для всех конечных путей } \tau. \tag{8.15}$$

⁶³Отметим, что в этом треугольнике зафиксированы все элементы, а не только самая верхняя строка.

⁶⁴Это распределение уже «живет» на T_λ , множестве всех путей длины N с концом λ .

Доказательство. По теореме Колмогорова, существует взаимно однозначное соответствие между вероятностными мерами на проективном пределе $T(\infty) = \varprojlim T(N)$ и семействами вероятностных мер $\{P_N\}$ (где P_N — вероятностная мера на $T(N)$), которые согласованы с проекциями $T(N) \rightarrow T(N-1)$ (то есть, при такой проекции мера P_N на $T(N)$ должна переходить в меру P_{N-1} на $T(N-1)$). Другими словами, для каждого пути τ длины N выполнено $P(\text{Cyl}(\tau)) = P_N(\tau)$.

Условие согласованности семейства мер $\{P_N\}$ можно записать в следующем виде. Пусть $\mu \in \text{Sign}(N-1)$ и τ — любой путь с концом μ . Тогда

$$P_{N-1}(\tau) = \sum_{\lambda: \lambda \succ \mu} P_N(\tau \cup \lambda), \quad (8.16)$$

где $\tau \cup \lambda$ — путь длины N , получающийся из τ добавлением вершины λ . А это и есть условие гармоничности для функции φ , связанной с P соотношением (8.15).

Далее, очевидно, что неотрицательность φ равносильна неотрицательности P . Кроме того, условие нормировки $\varphi(\emptyset) = 1$ равносильно тому, что P — вероятностная мера. $\square$

8.3 Гармонические функции и функции Войкулеску

Подробнее о материале этого раздела см. [Ols03].

Определение 8.12. *Крайней точкой* (extreme point) выпуклого множества E , лежащего в векторном пространстве, называется такая его точка, которая не лежит строго внутри отрезка с концами в E . Множество крайних точек множества E обозначим через $\text{Ex } E$.

Пример 8.13. Опишем крайние точки некоторых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^2$:

- У открытого круга крайних точек нет.
- Крайние точки замкнутого круга — это вся окружность.
- У замкнутого треугольника крайними точками являются его вершины и только они.

Заметим, что каждая точка треугольника является выпуклой линейной комбинацией своих вершин. Другими словами, каждая точка треугольника — это барицентр (центр тяжести) некоторой вероятностной меры на вершинах. Кроме того, эта вероятностная мера единственна.

Для замкнутого круга также верно, что каждая точка есть барицентр некоторой вероятностной меры на множестве крайних точек, однако такое представление не единственно.

Ясно, что если a, b и c — вершины треугольника, то сам треугольник можно отождествить с $\text{Prob}(\{a, b, c\})$ — множеством вероятностных мер на $\{a, b, c\}$. Вообще, если E — конечное множество, то $\text{Prob}(E)$ — (замкнутый) симплекс в конечномерном пространстве функций на E , и $\text{Ex } \text{Prob}(E)$ есть E . Каждая точка конечномерного симплекса является барицентром некоторой вероятностной меры на вершинах, и такое представление единственно. В конечномерном пространстве симплексы суть единственные выпуклые множества с единственностью разложения по крайним точкам.

Нас интересуют выпуклые множества E в бесконечномерных векторных пространствах, удовлетворяющие следующим свойствам:

- $\text{Ex } E$ непусто.
- Любая точка из E является барицентром некоторой вероятностной меры на $\text{Ex } E$.
- Такая мера единственна.

Модельным примером таких множеств являются множества $\text{Prob}(E)$, где E — измеримое пространство (то есть, в E выделена σ -алгебра подмножеств). Крайние точки суть дельта-меры; таким образом, $\text{Ex}(\text{Prob}(E)) = E$.

Следующие результаты связывают гармонические функции на графе Гельфанда-Цетлина с функциями Войкулеску.

Теорема 8.14 (Описание крайних точек множества Φ гармонических функций).

- Множество $\text{Ex}(\Phi)$ (где Φ — множество неотрицательных нормированных гармонических функций на графе Гельфанда-Цетлина) зависит в точности от тех же параметров, что и функции Войкулеску, то есть, от элементов ω множества $\Omega \subset \mathbb{R}^{4 \cdot \infty + 2}$, состоящего из наборов $(\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm)$, таких что

$$\begin{aligned} \alpha^\pm &= (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \beta^\pm &= (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \geq \dots \geq 0); \\ \gamma^\pm &\geq 0, \end{aligned} \quad (8.17)$$

и

$$\sum_i \alpha_i^+ + \sum_i \alpha_i^- + \sum_i \beta_i^+ + \sum_i \beta_i^- < \infty, \quad \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1. \quad (8.18)$$

- Биективное соответствие $\text{Ex}(\Phi) \leftrightarrow \Omega$ можно описать следующим образом. Пусть $\omega = (\alpha^\pm, \beta^\pm, \gamma^\pm) \in \Omega$ и $\Psi_\omega(u)$, $u \in \mathbb{T}^1$, — соответствующая функция Войкулеску (2.33). Тогда гармоническая функция $\varphi_\omega(\lambda)$ на графе Гельфанда-Цетлина определяется как

$$\varphi_\omega(\lambda) = [s_\lambda] \Psi_\omega(u_1) \dots \Psi_\omega(u_N) \quad \text{для всех } N \text{ и } \lambda \in \text{Sign}(N), \quad (8.19)$$

то есть, чтобы получить значение $\varphi_\omega(\lambda)$ для $\lambda \in \text{Sign}(N)$, надо взять N копий функции $\Psi_\omega(u)$, разложить симметрическую функцию $\Psi_\omega(u_1) \dots \Psi_\omega(u_N)$ по лорановским многочленам Шура, и взять коэффициент при $s_\lambda(u_1, \dots, u_N)$.

Также $\varphi_\omega(\lambda)$ можно записать в виде определителя тёплицевой матрицы (см. (7.42))

$$\varphi_\omega(\lambda) = \det [c_{\lambda_i - i + j}], \quad (8.20)$$

где $\Psi_\omega(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u^n$.

Теорема 8.15 (Интегральное представление гармонических функций). Для любой гармонической функции $\varphi \in \Phi$ существует единственная вероятностная мера $\mathcal{P}$ на $\text{Ex}(\Phi) = \Omega$, такая, что φ есть барицентр меры $\mathcal{P}$, то есть,

$$\varphi = \int_{\Omega} \varphi_\omega \mathcal{P}(d\omega). \quad (8.21)$$

Другими словами, выпуклое множество Φ изоморфно $\text{Prob}(\Omega)$.

Приведем схему доказательств теорем 8.14 и 8.15.

Через $\Upsilon(N)$ обозначим множество выпуклых комбинаций нормированных неприводимых характеров группы $U(N)$. Функции из $\Upsilon(N)$ являются центральными, поэтому их можно рассматривать как функции от собственных значений (см. также замечание 1.13). В этом смысле $\Upsilon(N)$ — множество функций вида

$$\Upsilon(N) = \left\{ \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N) : \tilde{c}_\lambda \geq 0, \sum \tilde{c}_\lambda = 1 \right\}. \quad (8.22)$$

Здесь $\tilde{s}_\lambda = \frac{s_\lambda}{s_\lambda(1, \dots, 1)} = \frac{s_\lambda}{\text{Dim} \lambda}$ — нормированные (лорановские) многочлены Шура (см. лекции 1 и 2). Ясно, что можно записать

$$\sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \tilde{s}_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \frac{\tilde{c}_\lambda}{\text{Dim} \lambda} s_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} c_\lambda s_\lambda. \quad (8.23)$$

В §1.5 были определены вложения унитарных групп $U(N-1) \hookrightarrow U(N)$. При соответствующей проекции пространств функций пространство $\Upsilon(N)$ переходит в $\Upsilon(N-1)$ (упражнение 8.3). Таким образом, можно определить проективный предел

$$\Upsilon(\infty) := \varprojlim \Upsilon(N). \quad (8.24)$$

Тривиально проверяется, что $\Upsilon(\infty)$ можно естественным образом отождествить с множеством всех центральных функций χ на $U(\infty)$, для которых $\chi|_{U(N)} \in \Upsilon(N)$ для всех N . Канонические проекции $\Upsilon(\infty) \rightarrow \Upsilon(N)$ и $\Upsilon(N) \rightarrow \Upsilon(N-1)$ являются аффинными отображениями в том смысле, что они согласованы с операцией взятия выпуклой комбинации точек.

Существует биекция $\Phi \leftrightarrow \Upsilon(\infty)$, которая задается следующим образом:

$$\varphi(\lambda) = [s_\lambda] (\chi|_{U(N)}), \quad \lambda \in \text{Sign}(N). \quad (8.25)$$

Таким образом, утверждения о структуре множества Φ можно переформулировать применительно к множеству $\Upsilon(\infty)$.

Заметим, что каждое множество $\Upsilon(N)$ является счетномерным симплексом, $\Upsilon(N) = \text{Prob}(\text{Ex}(\Upsilon(N)))$, а множество $\Upsilon(\infty)$ является проективным пределом этих симплексов. Имеет место следующая абстрактная теорема

Теорема 8.16. *Если выпуклое множество E представимо в виде проективного предела конечномерных или счетномерных симплексов, $E = \varprojlim E_N$, то $E = \text{Prob}(\text{Ex} E)$. Более того, любая крайняя точка из $\text{Ex} E$ допускает аппроксимацию крайними точками из $\text{Ex} E_N$, $N \rightarrow \infty$ (т.е. вершинами допредельных симплексов).*

Первое утверждение этой теоремы дает

$$\Upsilon(\infty) = \text{Prob}(\text{Ex}(\Upsilon(\infty))). \quad (8.26)$$

Согласно второму утверждению, для любой крайней точки $\chi \in \text{Ex}(\Upsilon(\infty))$ существует последовательность $\chi_N \in \text{Ex}(\Upsilon(N))$, такая, что $\chi_N \rightarrow \chi$. В нашей ситуации это в точности означает, что $\chi_N|_{\Upsilon(n)} \rightarrow \chi|_{\Upsilon(n)}$ для любого фиксированного n (имеется в виду сходимость из определения 2.7). Отсюда следует, что $\text{Ex}(\Upsilon(\infty))$ содержится в множестве пределов последовательностей $\{\chi_N\}$, $\chi_N \in \text{Ex}(\Upsilon(N))$.

В общей ситуации может оказаться, что эти два множества не равны (первое строго меньше второго). Но в нашем конкретном случае они совпадают. Одно из возможных доказательств приведено в [OO98]; оно использует мультипликативное свойство предельных функций и теорему де Финетти.

Рассуждение заканчивается применением теоремы 2.21.

Замечание 8.17. На языке гармонических функций аппроксимация крайних точек вершинами выглядит следующим образом. В предположении $\mu \in \text{Sign}(n)$, $\lambda \in \text{Sign}(N)$, $n < N$, обозначим через $\text{Dim}(\mu, \lambda)$ число (монотонных) путей от μ до λ , см. определение 8.4. Другими словами, $\text{Dim}(\mu, \lambda)$ — это число трапециевидных схем Гельфанда-Цетлина, у которых в нижнем основании стоит сигнатура μ , а в верхнем — λ . Отметим, что $\text{Dim}(\emptyset, \lambda) = \text{Dim} \lambda$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\lambda(\mu) := \frac{\text{Dim}(\mu, \lambda)}{\text{Dim} \lambda}, \quad (8.27)$$

где λ служит параметром, а μ — аргументом. Можно проверить (упражнение 8.4), что функция $\varphi_\lambda(\mu)$ удовлетворяет условиям неотрицательности, нормированности и гармоничности (до уровня N). Эту функцию можно строить рекуррентно с помощью условия гармоничности, взяв начальное условие $\varphi_\lambda(\mu) = \delta_{\mu\lambda}/\text{Dim}\lambda$ для $\mu \in \text{Sign}(N)$ и затем последовательно спускаясь на нижележащие уровни.

Для графа Гельфанда-Цетлина утверждение об аппроксимации означает следующее:

Для каждой функции $\varphi \in \text{Ex}(\Phi)$ существует последовательность сигнатур $\lambda(N) \in \text{Sign}(N)$, такая, что $\varphi_{\lambda(N)} \rightarrow \varphi$ (сходимость здесь поточечная).

В этом смысле можно сказать, что $\text{Ex}(\Phi)$ — *граница* графа Гельфанда-Цетлина. Действительно, каждую точку $\text{Ex}(\Phi) = \Omega$ можно рассматривать как виртуальный «конец пути», из которого мы «спускаем вниз» гармоническую функцию φ .

Отождествление границы графа Гельфанда-Цетлина с множеством параметров Ω дает наиболее элементарную интерпретацию формулировку теоремы 2.21, формально не зависящую от теории представлений.

8.4 Замощения

По бесконечному пути в графе Гельфанда-Цетлина можно построить замощение верхней полуплоскости $\{(x, y) \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$ ромбами трех видов (см. рис. 12). Проведем горизонтальные

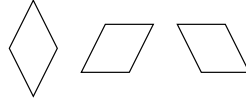


Рис. 12: Три вида ромбов.

прямые $y = N$, $N = 0, 1, 2, \dots$ и рассмотрим регулярную треугольную сетку в полуплоскости с вершинами в точках (x, y) вида

$$y = N = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } N \text{ четно} \\ \mathbb{Z}' := \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Пусть $\emptyset = \lambda^0 \prec \lambda_1 \prec \lambda_2 \dots$ — бесконечный путь в графе. Каждая пара сигнатур λ^N и λ^{N-1} нестрого перемежается. Сделаем небольшие преобразования, чтобы перейти к строго перемежающимся последовательностям. Пусть

$$\rho^N := \left(\frac{N-1}{2}, \frac{N-3}{2}, \dots, -\frac{N-1}{2} \right) \quad (8.28)$$

— вектор длины N . Рассмотрим последовательность векторов

$$\ell^N := \lambda^N + \rho^N, \quad \ell_i^N = \lambda_i^N + \frac{N+1}{2} - i. \quad (8.29)$$

Ясно, что ℓ^N и ℓ^{N-1} (для всех N) уже строго перемежаются:

$$\ell_1^N > \ell_1^{N-1} > \ell_2^N > \dots > \ell_{N-1}^{N-1} > \ell_N^N. \quad (8.30)$$

Числа ℓ_i^N при нечетных N целые, а при четных — полуцелые.

Отметим теперь некоторые точки на наших прямых. На граничной прямой $y = 0$ таких точек нет. На прямой $y = 1$ выделим точку с x -координатой ℓ_1^1 , на прямой $y = 2$ — две точки с x -координатами ℓ_1^2 и ℓ_2^2 , и так далее, см. рисунок 13.

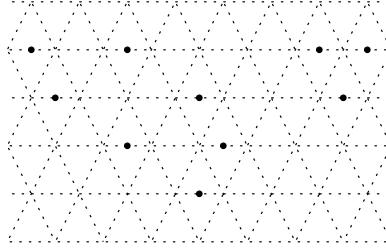


Рис. 13: Отмеченные точки ℓ_i^N .

Отметим, что каждая из отмеченных точек попадает в середину между двух соседних узлов сетки; нарисуем вокруг нее вертикальный ромб. Этим уже однозначно определяется замощение всей полуплоскости, в котором все остальные ромбы будут наклонными. В нашем случае из рис. 13 мы получим замощение, изображенное на рис. 14.

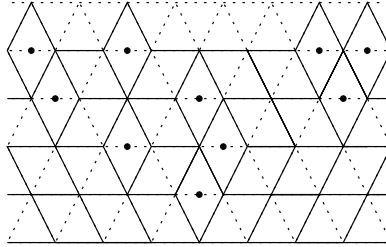


Рис. 14: Замощение полуплоскости.

Центральные вероятностные меры на путях в графе Гельфанда-Цетлина приводят к *случайным* замощениям.

8.5 Упражнения

Упражнение 8.1. Проверьте эквивалентность условия центральности (определение 8.8) и условия из замечания 8.9.

Упражнение 8.2. Покажите, что для гармонических функций φ на графе Гельфанда-Цетлина условие нормировки $\varphi(\emptyset) = 1$ равносильно тому, что $\sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \varphi(\lambda) \text{Dim} \lambda = 1$ для всех N .

Указание. Воспользуйтесь доказательством предложения 8.6.

Упражнение 8.3. Проверьте, что при вложении $U(N-1) \hookrightarrow U(N)$, определенном в §1.5, обратная проекция пространств функций переводит $\Upsilon(N)$ в $\Upsilon(N-1)$.

Указание. Воспользуйтесь правилом ветвления многочленов Шура (§1.5).

Упражнение 8.4. Проверьте, что функция $\varphi_\lambda(\mu) = \frac{\text{Dim}(\mu, \lambda)}{\text{Dim} \lambda}$ (где $\lambda \in \text{Sign}(N)$) удовлетворяет условию гармоничности (8.2) до уровня N . Обоснуйте рекуррентную конструкцию функции $\varphi_\lambda(\mu)$ из замечания 8.17.

Упражнение 8.5. Проверьте, что замощение, о котором шла речь, действительно однозначно определяется заданием вертикальных ромбов.

9 Факторы фон Неймана

В этой лекции будут кратко изложены начальные сведения об алгебрах и факторах фон Неймана, которые нам понадобятся. Ссылки на литературу можно найти в статье “von Neumann algebras” в Википедии. В частности, отмечу указанный там курс Вогана Джонса, который можно скачать. В дополнение укажу еще книгу Браттели–Робинсон, первый том которой переведен на русский. Полезная сводка результатов об алгебрах и факторах фон Неймана приведена в конце книги Диксмье о C^* -алгебрах.

Факторы фон Неймана являются бесконечномерным обобщением матричных алгебр $M_n := \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ (здесь и далее $\mathcal{L}(H)$ обозначает пространство ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H).

9.1 Алгебры с инволюцией

Определение 9.1. Мы будем рассматривать алгебры $\mathcal{A}$ над $\mathbb{C}$ с единицей и с *инволюцией* $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $a \mapsto a^*$, где $*$ — антилинейный антигомоморфизм, то есть,

$$(c \cdot a)^* = \bar{c} \cdot a^*, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad (a^*)^* = a \quad (9.1)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$ и $c \in \mathbb{C}$. Такие алгебры называются инволютивными или $*$ -алгебрами.

Пример 9.2. Алгебра ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(H)$ в гильбертовом пространстве H является модельным примером алгебры с инволюцией, которая есть обычная операция сопряжения операторов. Напомним определение сопряженного оператора A^* :

$$(A\xi, \eta) = (\xi, A^*\eta) \quad \text{для всех } \xi, \eta \in H. \quad (9.2)$$

Если $\dim H = n < \infty$, то $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = M_n$ — алгебра $n \times n$ матриц, а инволюция представляет собой сопряжение матриц.

Мы будем рассматривать $*$ -подалгебры $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$, т.е. подалгебры, содержащие единицу и замкнутые относительно инволюции в $\mathcal{L}(H)$.

Сначала рассмотрим случай, когда $\dim \mathcal{A} < \infty$.⁶⁵ Тогда можно показать, что алгебра $\mathcal{A}$ есть прямая сумма матричных алгебр в конечном числе:

$$\mathcal{A} \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}. \quad (9.3)$$

Выясним, как алгебра $\mathcal{A}$ может быть реализована в гильбертовом пространстве H .⁶⁶ Сначала рассмотрим случай одного слагаемого, $\mathcal{A} = M_n$.

Предложение 9.3. Если $\mathcal{A} = M_n \subset \mathcal{L}(H)$ — инволютивная подалгебра с единицей, то существует изоморфизм $H \simeq \mathbb{C}^n \otimes \tilde{H}$, где $\tilde{H}$ — вспомогательное гильбертово пространство, при котором элементы подалгебры $\mathcal{A}$ суть в точности операторы вида $a \otimes \mathbf{1}$, где $a \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.⁶⁷

Выбрав базис в $\tilde{H}$, мы можем изображать элементы алгебры $\mathcal{A}$ как (конечные или бесконечные) блочные матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

Здесь a — блок размера $n \times n$.

⁶⁵При этом пространство H может быть бесконечномерным.

⁶⁶То есть, изучить представления алгебры $\mathcal{A}$.

⁶⁷Здесь и далее через $\mathbf{1}$ мы обозначаем тождественный оператор.

Замечание 9.4. Это предложение означает, что любое представление $*$ -алгебры $\mathcal{A} = M_n$ кратно ее тавтологическому n -мерному представлению. Представление, кратное неприводимому, называется *примарным*. Заметим, что изоморфизм $H \simeq \mathbb{C}^n \otimes \tilde{H}$ с нужными свойствами определен не однозначно: если зафиксировать один такой изоморфизм, то всякий другой получается из него подкруткой на унитарный оператор в $\tilde{H}$.

Теперь перейдем к общему случаю конечномерных алгебр с инволюцией.

Предложение 9.5. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ — конечномерная инволютивная подалгебра с единицей. Тогда H канонически раскладывается в прямую сумму примарных представлений, в каждом из которых нетривиально действует лишь одна из компонент разложения $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}$.

9.2 Слабая операторная топология

Перейдем к рассмотрению бесконечномерных алгебр $\mathcal{A}$ с инволюцией (определение 9.1). Нам теперь потребуется некоторое дополнительное топологическое условие на $\mathcal{A}$. Существует два различных подхода к введению этого условия, приводящие к разным теориям. Один вариант (C^* -алгебры) связан с именами Гельфанда, Наймарка и Сигала (I. E. Segal), а второй, который мы будем рассматривать (алгебры фон Неймана, или W^* -алгебры), — с именами фон Неймана и его соавтора Мюррея (Murray).

Определение 9.6. Слабая операторная топология на $\mathcal{L}(H)$ порождена всеми функциями вида $A \mapsto (A\xi, \eta)$, где $\xi, \eta \in H$. Другими словами, это слабейшая топология, относительно которой все эти функции непрерывны.

Фундаментальная система окрестностей оператора $A \in \mathcal{L}(H)$ выглядит следующим образом. Возьмем $\xi_1, \dots, \xi_k \in h$ и $\varepsilon > 0$, тогда соответствующая окрестность имеет вид

$$\{B \in \mathcal{L}(H) : |(B\xi_i, \xi_j) - (A\xi_i, \xi_j)| < \varepsilon \quad \forall i, j = 1, \dots, k\}. \quad (9.5)$$

Замечание 9.7. Имеется некоторое различие в поведении слабой операторной топологии на всем пространстве $\mathcal{L}(H)$ и на его ограниченных (по операторной норме) подмножествах, примерами которых служат операторные шары

$$\mathcal{L}(H)_{\leq C} := \{A \in \mathcal{L}(H) : \|A\| \leq C\}, \quad C > 0. \quad (9.6)$$

А именно, на любом операторном шаре слабая операторная топология метризуема, а на всем $\mathcal{L}(H)$ — нет.

Отметим, что в слабой операторной топологии на $\mathcal{L}(H)$ умножение операторов $\mathcal{L}(H) \times \mathcal{L}(H) \rightarrow \mathcal{L}(H)$ является раздельно непрерывным отображением (то есть, непрерывным по каждому из аргументов при фиксированном втором), но не является непрерывным отображением по совокупности переменных.

Определение 9.8. Инволютивная подалгебра с единицей $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если она замкнута в слабой операторной топологии.

Замечание 9.9. Для любого семейства операторов $A_i \in \mathcal{L}(H)$, $i \in I$, существует наименьшая содержащая его алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$. (Говорят, что $\mathcal{A}$ порождена этим семейством.) Эта алгебра получается добавлением к семейству $\{A_i\}_{i \in I}$ единицы, всех сопряженных операторов A_i^* , взятием линейной оболочки и последующим замыканием в слабой операторной топологии.

Ясно, что всякая конечномерная инволютивная подалгебра с единицей $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ является алгеброй фон Неймана. В следующем примере мы опишем общий вид коммутативной алгебры фон Неймана.

Пример 9.10. Пусть (X, μ) — некоторое пространство с мерой. Пусть $H = L^2(X, \mu)$. В качестве $\mathcal{A}$ возьмем пространство $L^\infty(X, \mu)$, и каждой функции $f \in L^\infty(X, \mu)$ сопоставим оператор умножения на f в пространстве $L^2(X, \mu)$.

Напомним, что $L^2(X, \mu)$ и $L^\infty(X, \mu)$ определяются с точностью до эквивалентности функций: $f \sim g$, если $\mu(x: f(x) \neq g(x)) = 0$. В этом случае говорят, что $f = g$ μ -почти всюду, или $\text{mod } 0$. Пространство $L^2(X, \mu)$ состоит из классов функций, квадратично интегрируемых по мере μ , а пространство $L^\infty(X, \mu)$ — из *существенно ограниченных* функций, то есть таких, что

$$\|f\|_\infty := \inf_{\tilde{f}: \tilde{f} \sim f} \left(\sup_{x \in X} |\tilde{f}(x)| \right) < \infty. \quad (9.7)$$

Подалгебра $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ является коммутативной алгеброй фон Неймана.

9.3 Факторы фон Неймана

Алгебры фон Неймана (определение 9.8) являются аналогом прямых сумм матричных алгебр (см. предложение 9.5). Аналогом самих матричных алгебр служат факторы фон Неймана, которые определяются следующим образом.

Определение 9.11. Алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ называется *фактором*, если ее центр сводится к $\mathbb{C}\mathbf{1}$.

Замечание 9.12. В случае, если $\mathcal{A}$ — алгебра с инволюцией и единицей и $\dim \mathcal{A} < \infty$, имеем (см. предложение 9.5)

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{L}(\mathbb{C}^{n_i}). \quad (9.8)$$

Легко видеть, что центр $\mathcal{A}$ изоморфен $\underbrace{\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}_k$. Ясно, что центр $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathbb{C}\mathbf{1}$ в том и только том случае, когда $\mathcal{A}$ — одна матричная алгебра.

Стоит отметить, что вся алгебра $\mathcal{A} = \mathcal{L}(H)$ является фактором фон Неймана.

Перейдем к построению одного важного нетривиального примера фактора. Пусть G — счетная группа с бесконечными классами сопряженности, кроме $\{e\}$. Например, в качестве G может выступать бесконечная симметрическая группа $S(\infty) = \bigcup_{n=1}^\infty S(n)$ (это группа финитных перестановок натурального ряда), или F_n — свободная группа с n образующими, $n \geq 2$.

В качестве пространства H возьмем $\ell^2(G)$, то есть, гильбертово пространство с ортонормальным базисом $\{\delta_g\}_{g \in G}$. Пусть L и R — соответственно левое и правое регулярные представления G в H . Они задаются формулами

$$\begin{aligned} (L(g_1)f)(g) &= f(g_1^{-1}g); \\ (R(g_2)f)(g) &= f(gg_2), \end{aligned} \quad (9.9)$$

где $f \in H = \ell^2(G)$, $g_1, g_2, g \in G$. Ясно, что

$$L(g_1)\delta_g = \delta_{g_1g}, \quad R(g_2)\delta_g = \delta_{gg_2^{-1}}, \quad g \in G. \quad (9.10)$$

Отметим, что L и R коммутируют.

Рассмотрим семейство операторов $\{L(g_1), g_1 \in G\} \subset \mathcal{L}(H)$. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра фон Неймана, порожденная этим семейством (см. замечание 9.9). Она есть замыкание (в смысле слабой операторной топологии, см. определение 9.6) линейной оболочки операторов $L(g_1)$, $g_1 \in G$.

Предложение 9.13. Так определенная алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ является фактором.

Доказательство. Пусть оператор $A \in \mathcal{A}$ лежит в центре этой алгебры. Рассмотрим вектор $\delta_e \in H = \ell^2(G)$. Пусть

$$A\delta_e = f = \sum_{g \in G} f_g \delta_g. \quad (9.11)$$

Оператор A коммутирует со всеми операторами $L(g_1)$, $g_1 \in G$, так как он лежит в центре алгебры $\mathcal{A}$. Также A коммутирует со всеми операторами $R(g_2)$, $g_2 \in G$, так как A лежит в алгебре $\mathcal{A}$, порожденной L , а R и L коммутируют.

Отсюда можно заключить, что действие оператора A полностью определяется вектором $f = A\delta_e$. Действительно, для всех $h \in G$ имеем

$$A\delta_h = AR(h^{-1})\delta_e = R(h^{-1})A\delta_e = R(h^{-1})f. \quad (9.12)$$

Далее, вектор $f = A\delta_e \in \ell^2(G)$ — это функция на группе G . Из того, что A коммутирует с R и L , следует, что f постоянна на классах сопряженности группы G . Пользуясь тем, что в группе G все классы сопряженности, кроме $\{e\}$, бесконечны, заключаем, что если $f(g) \neq 0$ для некоторого $g \neq e$, то $f \notin \ell^2(G)$. Поэтому $f = c\delta_e$, и оператор A представляет собой оператор умножения на c , то есть, лежит в $\mathbb{C}1$.

Таким образом, $\mathcal{A}$ есть фактор фон Неймана. $\square$

Замечание 9.14. Факторы, построенные таким путем по группам $S(\infty)$ и F_n , неизоморфны (как алгебры с инволюцией). Чтобы фактор, построенный по некоторой группе G (с бесконечными классами сопряженности) был изоморфен фактору, построенному по $S(\infty)$, оказывается, достаточно, чтобы группа G была *аппроксимативно конечной*, то есть изоморфна индуктивному пределу последовательности конечных групп.

Вопрос, изоморфны или нет факторы, построенные по F_{n_1} и F_{n_2} при $n_1 \neq n_2$, представляет собой открытую проблему.

Существует классификация факторов фон Неймана по трем типам: I, II и III. Факторы типа I — это алгебры всех операторов вида $\mathcal{L}(H)$. Тип I подразделяется на два подтипа в зависимости от размерности пространства H — I_n и I_∞ . В факторах типа II также выделяются два подтипа — II_1 и II_∞ . Факторы типов I_n и II_1 называются *конечными*, факторы типов I_∞ и II_∞ — *полуконечными*. Нам понадобятся только конечные факторы.

9.4 Состояния

Определение 9.15. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$ — алгебра фон Неймана. Через $\mathcal{A}^+$ обозначим *конус неотрицательных элементов*. По определению, $A \in \mathcal{A}^+$ тогда и только тогда, когда $A = A^* \geq 0$ (в операторном смысле, то есть, $(A\xi, \xi) \geq 0$ для всех $\xi \in H$).

Условие $A = A^* \geq 0$ эквивалентно тому, что оператор A представим в виде $A = B^*B$ с $B \in \mathcal{A}$. Таким образом, условие $A = A^* \geq 0$ определяется внутренней структурой $*$ -алгебры $\mathcal{A}$ и не зависит от ее реализации как подалгебры в $\mathcal{L}(H)$. Поэтому конус $\mathcal{A}^+$ также определяется только внутренней структурой $\mathcal{A}$.

Определение 9.16. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$. Рассмотрим гильбертово пространство $H \oplus H \oplus \dots$ (счетное число копий пространства H), и рассмотрим вложение $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H \oplus H \oplus \dots)$:

$$\mathcal{L}(H) \ni A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & A & 0 & \dots \\ 0 & 0 & A & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(H \oplus H \oplus \dots). \quad (9.13)$$

При этом вложении слабая операторная топология пространства $\mathcal{L}(H \oplus H \oplus \dots)$ индуцирует в $\mathcal{A}$ некоторую топологию, которая сильнее, нежели исходная слабая топология, индуцированная вложением $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$. Эта новая топология называется *ультраслабой топологией* в $\mathcal{A}$.

Замечание 9.17. На операторных шарах $\mathcal{L}(H)_{\leq C}$ ультраслабая топология совпадает со слабой.

Ультраслабая топология сохраняется при $*$ -изоморфизме алгебр фон Неймана и, тем самым, не зависит от реализации алгебры фон Неймана как подалгебры в $\mathcal{L}(H)$.

Определение 9.18. *Состоянием* на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ называется линейный функционал $\tau: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, обладающий следующими свойствами:

- (нормировка) $\tau(1) = 1$;
- (неотрицательность) $\tau|_{\mathcal{A}^+} \geq 0$;
- (непрерывность) τ непрерывен в ультраслабой топологии на $\mathcal{A}$.

Замечание 9.19. Вместо непрерывности функционала τ в ультраслабой топологии можно потребовать следующее условие.

Пусть $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{A}^+$ произвольное возрастающее семейство элементов, где индекс i пробегает *направленное множество* I . Подробнее, I — такое частично упорядоченное множество, что для любой пары (x, y) существует z , для которого $z > x$ и $z > y$, и при этом если $i \leq j$, то $A_i \leq A_j$ в том смысле, что $A_j - A_i \in \mathcal{A}^+$. Можно показать, что тогда существует точная верхняя грань $\sup_i A_i$. Условие же состоит в том, что

$$\tau(\sup_i A_i) = \sup_i \tau(A_i). \quad (9.14)$$

Отметим, что справа уже стоит супремум числовой последовательности.

Приведем некоторые примеры.

Пример 9.20. • Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ — конечномерная матричная алгебра. Можно показать, что любое состояние на ней имеет вид $\tau(A) = \text{Tr}(AB)$, где $B \geq 0$ и $\text{Tr}(B) = 1$. Также это состояние можно записать в базисе как $\tau(A) = \sum_{i=1}^n c_i(A\xi_i, \xi_i)$, где $\|\xi_i\| = 1$, $c_i \geq 0$ и $\sum c_i = 1$. Состояния $A \mapsto (A\xi_i, \xi_i)$ можно называть простейшими. Таким образом, любое состояние является выпуклой линейной комбинацией простейших.

- Пусть $H = L^2(X, \mu)$ и $\mathcal{A} = L^\infty(X, \mu)$ (см. пример 9.10). Тогда любое состояние имеет вид

$$\tau(A) = \int_X A(x) \nu(dx), \quad (9.15)$$

где ν — некоторая вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно μ .

Из этих двух примеров видно, что состояния родственны вероятностным мерам.

9.5 Конечные следы и конечные факторы

Определение 9.21. Состояние τ на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ называется *конечным следом*, если $\tau(AB) = \tau(BA)$ для всех $A, B \in \mathcal{A}$.

Пример 9.22. • Если $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, то конечный след только один — это обычный нормированный след, $\tau(A) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A)$.

- На абелевой алгебре $L^\infty(X, \mu)$ все состояния являются конечными следами.

Определение 9.23. Фактор фон Неймана называется *конечным*,⁶⁸ если на нем существует конечный след.

⁶⁸См. также упоминание о классификации факторов фон Неймана в конце §9.3.

Можно показать, что если конечный след существует, то он единственный.

Фактор, построенный в §9.3 по бесконечной симметрической группе $S(\infty)$, является конечным. Действительно, легко понять, что состояние $\tau(A) = (A\delta_e, \delta_e)$ является конечным следом на этом факторе. В следующем подразделе мы дадим несколько иную реализацию этого фактора. Напомним (см. конец §9.3), что он имеет тип Π_1 .

Приведем еще одно определение. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра фон Неймана. Оператор $U \in \mathcal{A}$ называется *унитарным*, если $UU^* = U^*U = \mathbf{1}$. Ясно, что норма любого унитарного оператора равна единице, поэтому на множестве унитарных операторов слабая и ультраслабая топологии совпадают. Через $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ обозначим множество всех унитарных операторов. Можно показать, что это топологическая группа. Она порождает исходную алгебру фон Неймана. Строить унитарные операторы U можно из самосопряженных операторов следующими двумя способами. Пусть $A^* = A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}(H)$, тогда

- Оператор e^{iA} является унитарным;
- Оператор $\frac{A+i}{A-i} := (A+i\mathbf{1})(A-i\mathbf{1})^{-1}$ также является унитарным. Отображение $A \mapsto \frac{A+i}{A-i}$ называется *преобразованием Кэли* и играет важную роль.

Теперь можно дать эквивалентное определение конечного следа. A именно, состояние τ на алгебре фон Неймана $\mathcal{A}$ является конечным следом тогда и только тогда, когда

$$\tau(UAU^{-1}) = \tau(A) \quad (9.16)$$

для всех унитарных операторов $U \in \mathcal{A}$. Другими словами, конечные следы — это в точности унитарно инвариантные состояния.

9.6 Вторая конструкция конечного фактора

Здесь мы построим конечный фактор фон Неймана M (типа Π_1), который изоморфен фактору, построенному в §9.3 по группе $S(\infty)$.

Как уже было сказано, матричная алгебра $M_n := \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ есть конечный фактор типа I_n с конечным следом $\tau_n(A) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A)$. Рассмотрим вложенную цепочку алгебр⁶⁹

$$M_2 \subset M_4 \subset M_8 \subset \dots, \quad (9.17)$$

вложение $M_{2^k} \subset M_{2^{k+1}}$ определяется как

$$A \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}. \quad (9.18)$$

Ясно, что это вложение согласовано с конечными следами τ_n .

Обозначим через M индуктивный предел цепочки (9.17), то есть, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{2^k}$. На M есть три важные структуры, наследуемые с допредельных объектов M_{2^k} :

1. структура $*$ -алгебры;
2. функционал $\tau: M \rightarrow \mathbb{C}$: он определен тем условием, что $\tau|_{M_{2^k}}$ совпадает с τ_{2^k} ;
3. структура предгильбертова пространства относительно скалярного произведения $(A, B) = \tau(AB^*)$.

Рассмотрим теперь левое регулярное представление алгебры M на самой себе. Оно продолжается на гильбертово пополнение $\bar{M}$ пространства M , в результате чего мы реализуем M как $*$ -подалгебру в $\mathcal{L}(\bar{M})$. Затем, замыкая M в слабой топологии, получаем фактор фон Неймана со следом. Последний происходит из функционала τ .

⁶⁹Отметим, что вместо 2^k можно брать числа вида $n_1 n_2 \dots n_k$ (где n_i — произвольная последовательность натуральных чисел, больших единицы), полученные факторы будут эквивалентны.

10 Представление Вейля и спинорное представление

В этой и следующей лекциях мы опишем фундаментальные конструкции представлений бесконечномерных классических групп. Они значительно отличаются от конечномерного случая, в котором основным инструментом построения представлений является *индуцирование*.⁷⁰ В бесконечномерном случае индуцирование не работает из-за отсутствия меры Хаара.

Мы обсудим конструкции представления Вейля и спинорного представления. Они во многих отношениях сходны, и чтобы подчеркнуть это сходство, изложение будет вестись параллельно. Если в какой-то момент между этими конструкциями возникает различие, то *первый случай всегда соответствует представлению Вейля, а второй — спинорному представлению*.

10.1 Комплексные симплектическая и ортогональная группы

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{2N}$ с невырожденной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, которая предполагается либо кососимметрической (что соответствует представлению Вейля), либо симметрической (что соответствует спинорному представлению). Эта форма задается матрицей M размера $2N \times 2N$, такой что

$$M' = \mp M, \quad (10.1)$$

где штрих означает транспонирование.⁷¹

Векторы пространства $\mathbb{C}^{2N}$ записываются как столбцы, и мы имеем

$$\langle v_1, v_2 \rangle = v_2' M v_1, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2N}. \quad (10.2)$$

Определение 10.1. Через $L(N, \mathbb{C})$ обозначим группу обратимых линейных преобразований $\mathbb{C}^{2N}$, которые сохраняют форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Другими словами, $L(N, \mathbb{C})$ состоит из матриц g размера $2N \times 2N$, таких что $g' M g = M$.

Ясно, что $L(N, \mathbb{C})$ — группа Ли. Ее алгебра Ли, как нетрудно вычислить, определяется следующим образом:

$$\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) = \{X : MX + XM' = 0\} \subset \text{Mat}(2N \times 2N, \mathbb{C}). \quad (10.3)$$

Будем записывать матрицы размера $2N \times 2N$ как блочные 2×2 матрицы с блоками размера $N \times N$. Выберем базис в $\mathbb{C}^{2N}$, в котором матрица формы M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1_N \\ \mp 1_N & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.4)$$

где через 1_N обозначена единичная матрица размера $N \times N$ с единицами на главной диагонали.

Замечание 10.2. Иногда удобнее взять

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{1}_N \\ \mp \tilde{1}_N & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.5)$$

где $\tilde{1}_N$ — матрица размера $N \times N$ с единицами на побочной диагонали. Мы не будем использовать этот вариант, однако перейти от одного варианта к другому не составляет большого труда.

В блочной форме условие $MX + XM' = 0$ на матрицу $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} D &= -A', \\ B' &= \pm B, \\ C' &= \pm C. \end{aligned} \quad (10.6)$$

⁷⁰См., например, основополагающую работу [ГН50].

⁷¹Здесь и далее первый знак отвечает представлению Вейля, второй — спинорному представлению.

Замечание 10.3. Если M — кососимметрическая форма, то $L(N, \mathbb{C}) = Sp(2N, \mathbb{C})$ — комплексная симплектическая группа, а если M — симметрическая форма, то $L(N, \mathbb{C}) = O(2N, \mathbb{C})$ — комплексная ортогональная группа (но мы предпочитаем заменить ее на специальную ортогональную группу $SO(N, \mathbb{C})$). Соответствующие алгебры Ли обозначаются через $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$.

Определение 10.4. Через E_{ij} , $i, j = 1, \dots, N$ обозначим *матричную единицу*, то есть, матрицу размера $N \times N$, в которой все элементы нулевые, кроме одной единицы, которая стоит на пересечении i -й строки и j -го столбца.

В алгебре $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ можно выписать базис. Он состоит из трех видов матриц.

$$\begin{pmatrix} -E_{ji} & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \pm E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} \pm E_{ji} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.7)$$

где $i, j = 1, \dots, N$.

Отметим, что в случае спинорного представления (когда берется нижний знак из $\pm$) базисных элементов будет меньше.

10.2 Представление Вейля и спинорное представление комплексных алгебр Ли

Рассмотрим пространство тензоров $\mathbb{T}\mathbb{C}^N$, которое можно отождествить со свободной алгеброй от N переменных $\mathbb{C}\langle z_1, \dots, z_N \rangle$. Пусть $\mathbb{T}^\pm \mathbb{C}^N$ — две факторалгебры $\mathbb{T}\mathbb{C}^N$ по идеалам, порожденным соответственно всеми соотношениями вида $z_i z_j = \pm z_j z_i$, $i, j = 1, \dots, N$. Ясно, что $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ — алгебра полиномов $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$, а $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ — алгебра Грассмана $\Lambda[z_1, \dots, z_N]$.

Замечание 10.5. • Факторалгебры $\mathbb{T}^\pm \mathbb{C}^N$ можно рассматривать и как подпространства в $\mathbb{T}\mathbb{C}^N$, но нам удобнее реализовать их именно как факторалгебры.

- В алгебре Грассмана можно вместо умножения $z_i z_j$ писать внешнее умножение $z_i \wedge z_j$, но для единообразия мы так делать не будем.

Базис в $\mathbb{T}^\pm \mathbb{C}^N$ состоит из мономов $z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}$, где

- В случае $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ предполагается $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$;
- В случае $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ предполагается $m_i \in \{0, 1\}$.

Ясно, что $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ — конечномерная алгебра размерности 2^N , а алгебра $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ бесконечномерна.

Определение 10.6. Определим в $\mathbb{T}^\pm \mathbb{C}^N$ следующие операторы. Через z_i , $i = 1, \dots, N$ будем обозначать оператор умножения на z_i слева (в случае некоммутативной алгебры $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ это уточнение существенно), а через ∂_i — *левую производную* по z_i . В алгебре $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ оператор ∂_i есть обычная производная по z_i . В $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ действие оператора ∂_i на моном $z_{i_1} \dots z_{i_k}$ (такие мономы составляют базис в $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$) определяется следующим образом:

$$\partial_i(z_{i_1} \dots z_{i_k}) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \notin \{i_1, \dots, i_k\}; \\ (-1)^{j-1} z_{i_1} \dots z_{i_{j-1}} z_{i_{j+1}} \dots z_{i_k}, & \text{если } i = i_j. \end{cases} \quad (10.8)$$

Другими словами, если в мономе $z_{i_1} \dots z_{i_k}$ присутствует переменная z_i , то ее сначала надо перетащить влево (при этом возникнет знак $(-1)^{j-1}$), а затем удалить.

Предложение 10.7 (Квантово-механические соотношения). В алгебре $\mathbb{T}^+ \mathbb{C}^N$ выполнены следующие коммутационные соотношения между операторами из определения 10.6:

$$[\partial_i, z_j] = \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad [\partial_i, \partial_j] = [z_i, z_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (10.9)$$

где $[A, B] = AB - BA$ — обычный коммутатор.

В алгебре $\mathbb{T}^- \mathbb{C}^N$ выполнены аналогичные соотношения, если заменить коммутатор на антикоммутатор $\{A, B\} := AB + BA$.

Доказательство. Упражнение 10.7. $\square$

Построим представление алгебры Ли $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{T}^{\pm\mathbb{C}^N}$, указав операторы, отвечающие базисным элементам в $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ (определение 10.4). Эти операторы являются квадратичными выражениями от операторов z_i и ∂_i :

$$\begin{pmatrix} -E_{ji} & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} \rightarrow z_i \partial_j \pm \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \pm E_{ji} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \partial_i \partial_j, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} \pm E_{ji} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mp z_i z_j. \quad (10.10)$$

Здесь $i, j = 1, \dots, N$. Обратим внимание на слагаемое $\pm \frac{1}{2} \delta_{ij} \mathbf{1}$, оно возникает при коммутировании (соответственно, антикоммутировании) $z_i z_j$ с $\partial_i \partial_j$.

Можно проверить (упражнение 10.2), что формулы (10.10) действительно определяют представление алгебры Ли $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ в $\mathbb{T}^{\pm\mathbb{C}^N}$. Представление $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) = \mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ в $\mathbb{T}^+\mathbb{C}^N$ называется *представлением Вейля*, а представление $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) = \mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$ в $\mathbb{T}^-\mathbb{C}^N$ — *спинорным представлением*.

Наша дальнейшая задача — посмотреть, на какие группы Ли продолжаются эти представления алгебр Ли, и что происходит, когда $N \rightarrow \infty$.

10.3 Интегрирование представлений комплексных алгебр Ли

Дадим сначала общее определение.

Определение 10.8. Пусть $\mathfrak{l}$ — комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$ — ее вещественная форма.⁷² Пусть H — $\mathfrak{l}$ -модуль (то есть, представление алгебры Ли $\mathfrak{l}$). Говорят, что модуль H *унитаризуем*, если в H существует скалярное произведение (невырожденная положительно определенная полуторалинейная форма) $(\cdot, \cdot)$, такое, что для всех $\xi, \eta \in H$ выполнено

$$(X\xi, \eta) = -(\xi, \sigma(X)\eta), \quad (10.11)$$

где $X \in \mathfrak{l}$ и $\sigma: \mathfrak{l} \rightarrow \mathfrak{l}$ — инволюция сопряжения относительно вещественной формы $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$.⁷³

Нас интересует возможность продолжения (или, как говорят, *интегрирования*) представления комплексной алгебры Ли $\mathfrak{l}$ до унитарного представления подходящей вещественной группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$. Пусть алгебра $\mathfrak{l}$ конечномерна и H — ее унитаризуемое представление $\mathfrak{l}$. Если $\dim H < \infty$, то такое продолжение всегда существует (для односвязной группы Ли). Если же $\dim H = \infty$, продолжение существует не всегда, но имеются удобные условия, при которых оно возможно: тогда унитарное представление действует в гильбертовом пополнении пространства H .

Напомним, что в §10.2 мы построили представление Вейля и спинорное представление комплексных алгебр Ли $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$ в пространствах $\mathbb{T}^+\mathbb{C}^N$ и $\mathbb{T}^-\mathbb{C}^N$, соответственно. Также в $\mathbb{T}^{\pm\mathbb{C}^N}$ действуют операторы z_i и ∂_i , $i = 1, \dots, N$ (см. определение 10.6).

Предложение 10.9. В пространстве $\mathbb{T}^{\pm\mathbb{C}^N}$ существует единственное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, такое, что $(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = 1$ (здесь $\mathbf{1}$ — единичный тензор нулевого порядка) и

$$(z_i \xi, \eta) = (\xi, \partial_i \eta) \quad (10.12)$$

для всех $\xi, \eta \in \mathbb{T}^{\pm\mathbb{C}^N}$ и всех $i = 1, \dots, N$.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, относительно которого мономы $z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}$ составляют ортогональный базис, и

$$(z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}, z_1^{m_1} \dots z_N^{m_N}) = m_1! \dots m_N!. \quad (10.13)$$

⁷²То есть, алгебра $\mathfrak{l}$ является комплексификацией алгебры $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$.

⁷³Имеется в виду антилинейное отображение, фиксирующее элементы $\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}$.

Непосредственно проверяется, что оно удовлетворяет условиям предложения. Проверка его единственности использует то очевидное обстоятельство, что любой базисный моном получается из **1** применением монома от операторов z_i . Используя это и (10.12), легко вычислить тогда скалярное произведение двух базисных мономов. $\square$

Из этого предложения легко увидеть, что представление Вейля или спинорное представление алгебр Ли $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ унитаризуемо относительно следующей вещественной формы:

$$\mathfrak{l}(N, \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R}); \\ \mathfrak{o}(2N, \mathbb{R}), \end{cases} \quad (10.14)$$

— вещественная симплектическая или вещественная ортогональная алгебра Ли, соответственно. Отметим, что алгебра $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{R})$ компактна, в то время как $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R})$ — нет. Алгебра $\mathfrak{l}(N, \mathbb{R})$ выделяется из $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ условием $\sigma(X) = X$, где инволюция σ выглядит так:

$$\sigma: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A^* & \mp C^* \\ \mp B^* & D^* \end{pmatrix}. \quad (10.15)$$

Здесь элементы алгебры $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ представляются как блочные 2×2 матрицы с блоками размера $N \times N$, а звездочка означает обычное сопряжение матриц. Эквивалентным образом алгебру Ли $\mathfrak{l}(N, \mathbb{R})$ в ее двух вариантах можно определить так:

$$\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R}) = \mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(N, N); \quad \mathfrak{o}(2N, \mathbb{R}) = \mathfrak{o}(2N, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2N). \quad (10.16)$$

Здесь $\mathfrak{u}(2N)$ — алгебра Ли унитарной группы в $\mathbb{C}^{2N}$, а $\mathfrak{u}(N, N)$ — алгебра Ли псевдоунитарной группы, сохраняющей индефинитное скалярное произведение в $\mathbb{C}^{2N}$, задаваемое матрицей

$$\begin{pmatrix} -1_N & 0 \\ 0 & 1_N \end{pmatrix}. \quad (10.17)$$

Отметим еще, что в обоих случаях алгебра $\mathfrak{l}(N, \mathbb{R})$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & A \end{pmatrix}$ (здесь черта означает комплексное сопряжение), на которые дополнительно накладывается условие принадлежности к $\mathfrak{u}(N, N)$ или $\mathfrak{u}(2N)$, соответственно:

$$A = -A^*, \quad B = \pm B^*. \quad (10.18)$$

Подобную реализацию можно указать также и для группы $L(N, \mathbb{R})$. А именно, в случае представления Вейля

$$L(N, \mathbb{R}) = Sp(2N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\} \cap U(N, N) \quad (10.19)$$

— вещественная симплектическая группа, а в случае спинорного представления

$$L(N, \mathbb{R}) = O(2N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \right\} \cap U(2N) \quad (10.20)$$

— вещественная ортогональная группа. Здесь $U(N, N)$ и $U(2N)$ — псевдоунитарная и унитарная группы пространства $\mathbb{C}^{2N}$, соответственно. Данную конструкцию групп $Sp(2N)$ и $O(2N)$ можно называть их *комплексной реализацией* (ср. со стандартной реализацией, когда элементами групп являются вещественные матрицы). См. также упражнение 10.3.

Замечание 10.10. В группы $L(N, \mathbb{R})$ в комплексной реализации очень удобно вкладывается унитарная группа $U(N)$:

$$U(N) \ni U \mapsto \begin{pmatrix} \bar{U} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \in L(N, \mathbb{R}). \quad (10.21)$$

Сформулируем без доказательства итоговый результат о представлении Вейля и спинорном представлении конечномерных групп:

Теорема 10.11. *Представление Вейля и спинорное представление комплексных алгебр $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$ интегрируется до унитарного представления групп $Mp(2N, \mathbb{R})$ (вещественная метаклассическая группа) и $Spin(2N, \mathbb{R})$ (вещественная спинорная группа).*

Группа $Mp(2N, \mathbb{R})$ является двулистным накрытием группы $Sp(2N, \mathbb{R})$, а $Spin(2N, \mathbb{R})$ — двулистным накрытием группы $SO(2N, \mathbb{R})$. Группа $Spin(2N, \mathbb{R})$ компактна, а $Mp(2N, \mathbb{R})$ — нет.

Замечание 10.12. Группа $Spin(2N, \mathbb{R})$ действует в конечномерной алгебре Грассмана $\Lambda[z_1, \dots, z_N]$, а группа $Mp(2N, \mathbb{R})$ — в гильбертовом пополнении алгебры полиномов $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ по скалярному произведению из предложения 10.9. В духе нашего параллельного изложения двух представлений, обозначим оба пространства через H_N .

Пополнение $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ состоит из голоморфных функций $f(z)$ на $\mathbb{C}^N$ со скалярным произведением, определенным гауссовской мерой:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi^N} \int_{\mathbb{C}^N} f(z) \bar{g}(z) e^{-(z, z)} d_{Lebesgue}(z). \quad (10.22)$$

Разумеется, в пространство входят только функции с $(f, f) < \infty$.

10.4 Переход к индуктивному пределу

Рассмотрим индуктивные пределы конструкций, описанных выше.

- Алгебры $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C})$ вложены следующим образом:

$$\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{l}(N+1, \mathbb{C}), \quad X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (10.23)$$

Здесь A, B, C, D — $N \times N$ матрицы, при вложении $\mathfrak{l}(N, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathfrak{l}(N+1, \mathbb{C})$ каждая из этих матриц «окаймляется» нулями.

- Группы $L(N, \mathbb{C})$ вложены аналогично:

$$L(N, \mathbb{C}) \hookrightarrow L(N+1, \mathbb{C}), \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline c & 0 & d & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (10.24)$$

только матрицы a, b, c, d «окаймляются» немного по-другому.

Обозначим индуктивный предел групп $L(N, \mathbb{R})$ через $L(\infty, \mathbb{R})$.

- Существуют также естественные вложения пространств H_N :

$$\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N] \hookrightarrow \mathbb{C}[z_1, \dots, z_{N+1}], \quad \Lambda[z_1, \dots, z_N] \hookrightarrow \Lambda[z_1, \dots, z_{N+1}]. \quad (10.25)$$

Отметим, что эти вложения изометричны относительно скалярного произведения, определенного в предложении 10.9.

Обозначим через H гильбертово пополнение индуктивного предела пространств H_N .

Таким образом, мы получаем представление Вейля и спинорное представление групп $Mp(2\infty, \mathbb{R})$ и $Spin(2\infty, \mathbb{R})$, соответственно⁷⁴ в пространстве H . Наша следующая задача — расширить эти представления на более широкие группы, пополняя $L(\infty, \mathbb{R})$ в подходящей топологии. Для этого нам понадобятся операторные идеалы.

⁷⁴А также «более привычных» групп $Sp(2\infty, \mathbb{R})$ и $SO(2\infty, \mathbb{R})$.

10.5 Операторные идеалы

Более подробное изложение материала этого подраздела см. в книгах [Sim05] и [ГК65].

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — алгебра ограниченных операторов в $\mathcal{H}$. Нас будут интересовать двусторонние идеалы в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, которые также инвариантны относительно операции сопряжения в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отметим следующие два примера:

- Оператор в $\mathcal{H}$ называется *конечномерным*, если его образ представляет собой конечномерное пространство. Алгебра всех конечномерных операторов в $\mathcal{H}$ является двусторонним идеалом в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- Оператор в $\mathcal{H}$ называется *компактным*, если он переводит ограниченные множества в предкомпактные (то есть, такие, замыкания которых суть компакты). Алгебра компактных операторов также является двусторонним идеалом в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Очевидно, конечномерные операторы компактны. Оказывается, между алгебрами конечномерных и компактных операторов есть еще много двусторонних идеалов.

Для $1 \leq p < \infty$ обозначим через ℓ^p пространство последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с конечной нормой $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$.

Предложение 10.13 (Полярное разложение). *Для каждого ограниченного оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ существует самосопряженный неотрицательно определенный ограниченный оператор (обозначаемый через $|A|$) и унитарный оператор U , такие, что*

$$A = |A|U. \quad (10.26)$$

В качестве $|A|$ можно взять оператор $(AA^*)^{1/2}$, который строится с помощью спектральной теоремы.⁷⁵ Если оператор A вырожден, то оператор U определяется неоднозначно, но нам это сейчас не так важно.

Определение 10.14. Если оператор A компактен, то $|A|$ — тоже, и поэтому у $|A|$ существуют собственные числа $x = (x_1, x_2, \dots)$. Числа x_i называются *сингулярными числами* оператора A .

Определение 10.15. Пусть $1 \leq p < \infty$. Через $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ обозначим множество компактных операторов A , у которых сингулярные числа $x = (x_1, x_2, \dots)$ лежат в ℓ^p . Норма в $\mathcal{L}^p$ определяется как $\|A\|_p := \|x\|_p$.

Можно показать, что $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ — действительно двусторонние идеалы в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, инвариантные относительно сопряжения. Конечномерные операторы содержатся в каждом $\mathcal{L}^p$ и плотны в нем по норме $\|\cdot\|_p$, а сами $\mathcal{L}^p$ являются банаховыми пространствами. Можно также считать, что пространство всех компактных операторов — это $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})$. Норма $\|\cdot\|_p$ является унитарно инвариантной, то есть, $\|UAU^{-1}\|_p = \|A\|_p$ для любого $A \in \mathcal{L}^p$ и любого унитарного оператора U .

Отметим, что $\mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^{p_2}$ при $p_1 < p_2$.

Определение 10.16. Элементы пространства $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ называются *ядерными операторами*,⁷⁶ а элементы $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ — *операторами Гильберта-Шмидта*.

Ядерные операторы имеют след, а именно, существует непрерывная функция Tr на $\mathcal{L}^1(\mathcal{H})$, которая на конечномерных операторах совпадает с обычным следом. Функция $A \mapsto \det(1 + A)$ также продолжается по непрерывности с конечномерных операторов на ядерные.

Пространство $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ можно отождествить с $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ (комплексное сопряжение здесь означает, что мы меняем комплексную структуру в $\mathcal{H}$). Произведение двух операторов Гильберта-Шмидта есть ядерный оператор, поэтому в $\mathcal{L}^2(\mathcal{H})$ можно определить скалярное произведение по формуле $(A, B) = \text{Tr}(AB^*)$.

⁷⁵Как известно из спектральной теоремы, оператор AA^* подобен оператору умножения на неотрицательную функцию f . Через $(AA^*)^{1/2}$ обозначается оператор, который получается при замене функции f на $\sqrt{f}$.

⁷⁶Англ. *trace class operators*.

10.6 Пополнение индуктивных пределов

Группы $Sp(2\infty, \mathbb{R})$ и $SO(2\infty, \mathbb{R})$ определялись как индуктивные пределы. Они состоят из операторов в координатном пространстве $\mathcal{H} = \ell^2 \oplus \ell^2$ (данный вид пространства $\mathcal{H}$ обусловлен тем, что мы представляли наши матрицы как блочные 2×2 матрицы с блоками размера $N \times N$), представимых в виде $1 + A$, где A — конечномерный оператор. Поскольку конечномерные операторы плотны в каждом $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, можно рассматривать пополнения этих групп по норме $\mathcal{L}^p$.

Рассмотрим для примера группу $Sp(2\infty, \mathbb{R}) = \varinjlim Sp(2N, \mathbb{R})$. Она состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad (10.27)$$

где $a, b \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. На эти матрицы накладывается два условия: первое есть псевдоунитарность матрицы, что выражается соотношениями типа

$$-aa^* + bb^* = -1, \quad -ab' + ba' = 0 \quad (10.28)$$

а второе условие состоит в том, что $a - 1$ и b — конечномерные операторы.

Пополнение группы $Sp(2\infty, \mathbb{R})$ в $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ получается в результате подходящего изменения второго условия: вместо конечномерности операторов $a - 1$ и b мы требуем теперь, чтобы они лежали в $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$. Обозначим это пополненную группу через $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$. Топология в $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$ определяется нормой пространства $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$.

Обозначим через $\overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$ полную симплектическую группу, которая возникает при полном снятии второго условия.

Из того, что $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ — двусторонние идеалы в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, следует, что $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$ для всех $1 \leq p < \infty$ является нормальной подгруппой в $\overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$.

Точно так же можно определить группы $SO(2\infty, \mathbb{R})_p$ и полную ортогональную группу $\overline{O}(2\infty)$.

Далее, у групп $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$ и $SO(2\infty)_p$ имеются двулистные накрытия, которые мы будем обозначать через $Mp(2\infty, \mathbb{R})_p$ и $Spin(2\infty)_p$.

Справедлива следующая теорема о продолжении представления Вейля и спинорного представления с индуктивных пределов групп на их пополнения.

Теорема 10.17. *Представление Вейля и спинорное представление продолжаются по непрерывности с $Mp(2\infty, \mathbb{R})$ и $Spin(2\infty)$ на $Mp(2\infty, \mathbb{R})_1$ и $Spin(2\infty, \mathbb{R})_1$, соответственно.*

Так как $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p \triangleleft \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$, то для всех p (и, в частности, для $p = 1$) группа $\overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$ действует на $Sp(2\infty, \mathbb{R})_p$ сопряжениями. Это действие продолжается на двулистное накрытие $Mp(2\infty, \mathbb{R})_p$.

Пусть W — представление Вейля группы $Mp(2\infty, \mathbb{R})_1$. Пусть $h \in \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$. Если $g \in Mp(2\infty, \mathbb{R})_1$, то ясно, что $hgh^{-1} \in Mp(2\infty, \mathbb{R})_1$. Поэтому можно определить представление

$$W_h(g) := W(hgh^{-1}). \quad (10.29)$$

Возникает естественный вопрос: как соотносятся между собой представления W и W_h ? В конечномерном случае они эквивалентны, так как $g \mapsto hgh^{-1}$ есть внутренний автоморфизм автоморфизм группы. Разумеется, если $h \in Sp(2\infty, \mathbb{R})_1$, то W_h и W эквивалентны. Оказывается, что это верно для большего множества сопрягающих элементов h , но не для всех $h \in \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$:

Теорема 10.18. *Элементы $h \in \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$, сохраняющие представление Вейля — это в точности такие $h = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, что b является оператором Гильберта-Шмидта.*

Операторы $h \in \overline{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$, описанные в предыдущей теореме, на самом деле образуют группу, и представление Вейля можно продолжить на нее в качестве проективного представления.

Точно такой же результат имеет место и для спинорного представления.

10.7 Упражнения

Упражнение 10.1. Проверьте соотношения из предложения 10.7.

Упражнение 10.2. Проверьте, что формулы (10.10) действительно определяют представление алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{C})$ в $T^+\mathbb{C}^N$, и алгебры Ли $\mathfrak{o}(2N, \mathbb{C})$ в $T^-\mathbb{C}^N$.

Упражнение 10.3. Как осуществляется переход от комплексных реализаций (10.19) и (10.20) групп $Sp(2N, \mathbb{R})$ и $O(2N)$ к стандартным вещественным реализациям?

11 Фактор–представления и сферические представления

11.1 Конечные фактор–представления

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольная группа (дискретная или топологическая), $\mathcal{A}$ — фактор фон Неймана (см. определения 9.8 и 9.11). Элементы $\mathcal{A}$ мы также будем называть операторами. Напомним, что через $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ обозначается группа унитарных операторов фактора $\mathcal{A}$, то есть, таких операторов $U \in \mathcal{A}$, что $UU^* = U^*U = \mathbf{1}$. Это действительно группа, и даже топологическая группа относительно ультраслабой топологии (впрочем, на $\mathcal{U}$ ультраслабая топология совпадает со слабой и с сильной топологиями). Напомним, что алгебра фон Неймана, порожденная $\mathcal{U}$, совпадает с $\mathcal{A}$.

Определение 11.1. Отображение $\pi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{U}$ называется *фактор–представлением* группы $\mathcal{K}$, если

- π — гомоморфизм групп;
- Алгебра фон Неймана, порожденная образом $\pi(\mathcal{K})$ (см. замечание 9.9), совпадает со всем фактором $\mathcal{A}$. Это обозначается $\langle \pi(\mathcal{K}) \rangle = \mathcal{A}$;
- Если $\mathcal{K}$ — топологическая группа, то π также предполагается непрерывным.

Пример 11.2. Пусть $\mathcal{A}$ — фактор типа I_n , то есть, $\mathcal{A}$ изоморфен $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ — алгебре всех операторов в $\mathbb{C}^n$. Ясно, что в этом случае $\mathcal{U} = U(n)$. При любой реализации фактора в гильбертовом пространстве π превращается в унитарное представление, кратное некоторому неприводимому представлению.

Нас будут интересовать конечные фактор–представления (то есть, представления, порождающие факторы типа I_n и II_1). Напомним, что на конечном факторе существует конечный след τ (см. определения 9.18 и 9.21) — линейный функционал, такой, что

- $\tau|_{\mathcal{A}^+} \geq 0$, где $\mathcal{A}^+$ — конус положительных элементов фактора $\mathcal{A}$;
- $\tau(UAU^{-1}) = \tau(A)$ для любого $A \in \mathcal{A}$ и $U \in \mathcal{U}$;
- $\tau(\mathbf{1}) = 1$.

Для конечного фактор–представления, как и для конечномерного представления, можно определить *характер* — функцию χ на группе, равную

$$\chi(u) = \tau(\pi(u)), \quad u \in \mathcal{K}. \quad (11.1)$$

Пример 11.3. Если фактор $\mathcal{A}$ имеет тип I_n , то при любой его реализации χ сводится к обычному нормированному характеру, $\chi(u) = \frac{\text{Tr } \pi(u)}{\text{Tr } \pi(e)}$. Заметим, что χ не зависит от кратности единственной неприводимой компоненты. Если же $\mathcal{A}$ имеет тип II_1 , мы получаем естественное обобщение этого понятия. Видно, что нормировка характера здесь существенна (ср. с замечанием 2.9).

Сформулируем абстрактную теорему.

Теорема 11.4. *Конечное фактор–представление однозначно определяется своим характером.*

Как и в теории конечномерных представлений, характеры допускают определение, формально независимое от представлений. Предварительно введем

Определение 11.5. Функция χ на группе $\mathcal{K}$ называется *положительно определенной*, если $\chi(u^{-1}) = \overline{\chi(u)}$ для всех $u \in \mathcal{K}$, и для любого конечного набора элементов группы $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{K}$ матрица $[\chi(u_i u_j^{-1})]_{i,j=1}^n$ является неотрицательно определенной, то есть, для произвольных чисел $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ выполнено

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j \chi(u_i u_j^{-1}) \geq 0. \quad (11.2)$$

Заметим, что характер фактор–представления является положительно определенной функцией. Действительно, для любых $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{K}$ и $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ рассмотрим оператор $A = \sum_{i=1}^n c_i \pi(u_i) \in \mathcal{A}$. Ясно, что условие (11.2) равносильно тому, что $\tau(AA^*) \geq 0$ (что верно по условию неотрицательности следа).

Определение 11.6. Через $\Upsilon(\mathcal{K})$ обозначим множество всех функций $\chi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$, которые

- положительно определены;
- центральны, то есть, постоянны на классах сопряженности в $\mathcal{K}$;
- нормированы, $\chi(e) = 1$;
- непрерывны, если группа $\mathcal{K}$ — топологическая.

Ясно, что $\Upsilon(\mathcal{K})$ — выпуклое множество. Следующая теорема дает альтернативное определение характеров:

Теорема 11.7. *Характеры конечных фактор–представлений суть в точности крайние точки выпуклого множества $\Upsilon(\mathcal{K})$.*⁷⁷

Замечание 11.8. Для случая $\mathcal{K} = U(\infty)$ эта теорема уже была в лекции 8. Там определялось множество $\Upsilon(\infty)$. Легко понять, что это в точности $\Upsilon(U(\infty))$ в смысле определения 11.6.

Мы уже знаем описание всех крайних точек множества $\Upsilon(U(\infty))$, это функции Войкулеску (см. теорему 8.14). Из теорем 11.4 и 11.7 вытекает, что должны существовать конечные фактор–представления, соответствующие этим крайним точкам. В этой лекции мы сначала сведем фактор–представления к эквивалентному понятию *сферических представлений*, а затем предьявим явную конструкцию сферических представлений, которые соответствуют некоторым из этих характеров.

11.2 Сферические представления

Если фактор $\mathcal{A}$ (например, типа Π_1) реализован внутри алгебры операторов $\mathcal{L}(H)$, то можно определить его *коммутант* $\mathcal{A}'$, то есть, множество всех операторов, коммутирующих с $\mathcal{A}$. Если вспомнить две конструкции фактора типа Π_1 из лекции 9, то видно, что в каждой из конструкций наряду с самим фактором неявно присутствует и его коммутант:

- В конструкции с помощью левого регулярного представления в $\ell^2(S(\infty))$ также можно рассматривать правое регулярное представление;

⁷⁷См. определение 8.12.

- В конструкции фактора с помощью индуктивного предела матричных алгебр размера 2^n также наряду с левым действием можно рассматривать и правое.

Поэтому фактор-представления группы K естественным образом приводят к представлениям *дубля* группы K , то есть, группы $K \times K$. Дадим сначала более общее определение.

Определение 11.9. Пусть G — группа и $K \subset G$ — подгруппа. Нас интересуют неприводимые унитарные представления $T: G \rightarrow U(H)$.⁷⁸ Через H^K обозначим пространство K -инвариантных векторов в H . Такие векторы называются *сферическими*.

Пара (G, K) называется *парой Гельфанда*, если для любого неприводимого представления T группы G пространство H^K имеет размерность 0 или 1.

Определение 11.10. Представление пары Гельфанда (G, K) называется *сферическим*, если размерность H^K равна единице.

Определение 11.11. Возьмем в сферическом представлении T вектор $\xi \in H^K$ с $\|\xi\| = 1$. Он, конечно, определен лишь с точностью до умножения на комплексное число, по модулю равное единице, однако соответствующий ему *матричный элемент*

$$\varphi(g) := (T(g)\xi, \xi), \quad g \in G, \quad (11.3)$$

уже определяется однозначно. Функция φ называется *сферической функцией* представления T .

Сформулируем абстрактную теорему.

Теорема 11.12. *Неприводимое унитарное сферическое представление пары Гельфанда (G, K) однозначно определяется своей сферической функцией.*

Определение 11.13. Пусть (G, K) — пара Гельфанда. Через $\Phi(G, K)$ обозначим множество функций φ на группе G , которые удовлетворяют следующим свойствам:

- φ положительно определена;
- φ K -биинвариантна, или K -двусторонне инвариантна), то есть,

$$\varphi(u_1 g u_2) = \varphi(g) \quad \text{для всех } g \in G, u_1, u_2 \in K. \quad (11.4)$$

- $\varphi(e) = 1$;
- если в группе есть топология, то φ непрерывна;

Ясно, что $\Phi(G, K)$ — выпуклое множество. Сформулируем еще одну абстрактную теорему.

Теорема 11.14. *Неприводимые сферические представления пары Гельфанда (G, K) находятся во взаимно однозначном соответствии с крайними точками множества $\Phi(G, K)$.*

Приведем пример, который исторически привел к понятию сферического представления. Он также объясняет происхождение самого термина.

Пример 11.15. Пусть $G = SO(3)$ — группа собственных вращений трехмерного пространства. Пусть $K \subset G$ — подгруппа, сохраняющая третью ось Oz . Ясно, что $K \cong SO(2)$. K -биинвариантные функции на G должны быть инвариантны относительно правого действия группы K , поэтому их можно рассматривать как функции на сфере $G/K \cong S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Они к тому же инвариантны относительно левого действия группы K , то есть, вращений сферы S^2 вокруг оси Oz . Другими словами, эти функции постоянны вдоль каждой параллели.⁷⁹ Можно считать, что они на самом деле зависят от широты, а широту измерять вдоль вертикального диаметра сферы. Таким образом, широта будет числом из отрезка $[-1, 1]$. На самом деле, эти сферические функции являются многочленами Лежандра (с точностью до нормировочного множителя).

⁷⁸Это уже обычные представления, а не фактор-представления.

⁷⁹Мы считаем, что ось Oz направлена вверх.

Замечание 11.16. Существует много примеров пар Гельфанда: если K — компактная подгруппа, выделяемая инволютивным автоморфизмом из простой группы Ли G (в этом случае однородное пространство является римановым симметрическим пространством), то (G, K) является парой Гельфанда.

Сформулируем еще одну абстрактную теорему, которая нам в дальнейшем пригодится.

Теорема 11.17. *Индуктивный предел пар Гельфанда снова является парой Гельфанда.*

С этого момента мы ограничимся рассмотрением пар Гельфанда специального вида. А именно, пусть $\mathcal{K}$ — произвольная дискретная или топологическая группа. Положим $G = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$, а в качестве подгруппы $K \subset G$ возьмем *диагональ* $\{(u, u) : u \in \mathcal{K}\}$. Ясно, что $K \cong \mathcal{K}$.

Теорема 11.18. *Для любой (топологической) группы $\mathcal{K}$ так определенная пара (G, K) является парой Гельфанда.*

Посмотрим, какими могут быть сферические представления этой пары. Пусть сперва группа $\mathcal{K}$ компактна. Тогда известно, что все ее неприводимые унитарные представления конечномерны.

Предложение 11.19. *Все неприводимые сферические представления T пары (G, K) (где $\mathcal{K}$ компактна) имеют вид*

$$T = \pi \otimes \bar{\pi}, \quad (11.5)$$

где π — неприводимое унитарное представление $\mathcal{K}$.

Представление $\bar{\pi}$ — это *сопряженное* представление, которое действует в пространстве $\overline{H(\pi)}$ (само π действует в $H(\pi)$). Пространство $\overline{H(\pi)}$ получается из $H(\pi)$ путем сопряжения комплексной структуры.

Доказательство. Реализуем T в $H(\pi) \otimes \overline{H(\pi)}$. Для конечномерных пространств верно, что

$$H(\pi) \otimes \overline{H(\pi)} \cong \mathcal{L}(H(\pi)). \quad (11.6)$$

(Отметим, что если пространство $H(\pi)$ бесконечномерно, то написанное равенство неверно; чтобы его исправить, необходимо $\mathcal{L}(H(\pi))$ заменить на $\mathcal{L}^2(H(\pi))$ — пространство операторов Гильберта–Шмидта.)

Представление $\pi \otimes \bar{\pi}$ действует в $H(\pi) \otimes \overline{H(\pi)}$. При отождествлении этого пространства с $\mathcal{L}(H(\pi))$ действие $\pi \otimes \bar{\pi}$ принимает вид

$$(\pi \otimes \bar{\pi})(u_1, u_2)A = T(u_1, u_2)A = \pi(u_1)A\pi(u_2)^{-1}, \quad A \in \mathcal{L}(H(\pi)), \quad u_1, u_2 \in \mathcal{K}. \quad (11.7)$$

При этом в $\mathcal{L}(H(\pi))$ есть единственное K -инвариантное подпространство — оно натянуто на единичный оператор.⁸⁰ $\square$

В случае, когда группа $\mathcal{K}$ не компактна, а $H(\pi)$ бесконечномерно, это рассуждение не проходит, поскольку тогда единичный оператор не попадает в пространство операторов Гильберта–Шмидта. Однако, предложение остается в силе для любых групп $\mathcal{K}$, если вместо неприводимых унитарных представлений π рассматривать конечные фактор–представления.

Предложение 11.20. *Существует биективное соответствие между конечными фактор–представлениями π группы $\mathcal{K}$ и неприводимыми сферическими представлениями T пары Гельфанда (G, K) , где $G = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ и K — диагональ.*

⁸⁰ Действительно, если бы существовал нескаларный K -инвариантный оператор A , то он был бы сплетающим для представления π с самим собой, что по лемме Шура (лемма 7.4) невозможно.

Доказательство. ($T \rightarrow \pi$) Пусть T — сферическое представление, тогда положим $\pi := T|_{\mathcal{K} \times \{e\}}$, то есть, просто возьмем ограничение представления T на первую компоненту. Можно показать, что π будет фактор-представлением группы $\mathcal{K}$, причем конечным: след на факторе задается матричным элементом, отвечающим сферическому вектору.

Отметим, что если представление T конечномерно, то в качестве фактор-представления при ограничении T на $\mathcal{K} \times \{e\}$ мы получим соответствующее неприводимое представление π (такое, что $T = \pi \otimes \bar{\pi}$), повторенное столько раз, какова его размерность (см. предложение 11.19).

($\pi \rightarrow T$) Пусть π — конечное фактор-представление группы $\mathcal{K}$, $\mathcal{A}$ — соответствующий фактор фон Неймана. На $\mathcal{A}$ есть конечный след τ и можно определить скалярное произведение $(A, B) := \tau(AB^*)$, $A, B \in \mathcal{A}$. Пусть $\overline{\mathcal{A}}$ — гильбертово пополнение пространства $\mathcal{A}$ по этому скалярному произведению. Построим представление T в $\overline{\mathcal{A}}$ по формуле $T(u_1, u_2)A = \pi(u_1)A\pi(u_2)^{-1}$, $A \in \mathcal{A}$, $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$. Тогда можно показать, что единственным (с точностью до пропорциональности) сферическим вектором представления T является единичный оператор $1 \in \overline{\mathcal{A}}$. В случае фактора типа I_n построенное представление T будет тензорным произведением неприводимого представления на сопряженное к нему, но в случае II_1 это заведомо неверно. $\square$

Существует биекция между пространством $\Upsilon(\mathcal{K})$ (определение 11.6) и пространством $\Phi(G, K)$ (определение 11.13). Эту биекцию можно записать следующим образом:

- ($\Upsilon(\mathcal{K}) \rightarrow \Phi(G, K)$) Пусть $\chi \in \Upsilon(\mathcal{K})$, тогда $\varphi(u_1, u_2) := \chi(u_1 u_2^{-1})$, $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$.
- ($\Phi(G, K) \rightarrow \Upsilon(\mathcal{K})$) Пусть $\varphi \in \Phi(G, K)$, тогда $\chi(u) := \varphi(u, e)$.

Это соответствие основано на том простом факте, что биекция $\chi \leftrightarrow \varphi$ отождествляет центральные функции на $\mathcal{K}$ и K -биинвариантные функции на $G = \mathcal{K} \times \mathcal{K}$ (где $K \subset G$ — диагональ). При этом остальные свойства, включенные в определение $\Upsilon(\mathcal{K})$ и $\Phi(G, K)$, автоматически переносятся с χ на φ и обратно.

Теперь ясно, какой более общий смысл имеет замечание о факторах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$, данное в начале этого подраздела. Пусть T — сферическое представление пары (G, K) со сферической функцией $\varphi(u_1, u_2)$. Тогда можно определить характер χ на $\mathcal{K}$ по формуле $\chi(u) := \varphi(u, e)$, и мы получим характер конечного фактор-представления группы $\mathcal{K}$. Обозначим соответствующий фактор через $\mathcal{A}$. Но аналогично можно определить характер $\chi(u) := \varphi(e, u)$, и тогда получится фактор $\mathcal{A}'$ (коммутант фактора $\mathcal{A}$).

11.3 Подготовка к построению сферических представлений

Теперь приступим к явной реализации сферических представлений, соответствующих функциям Войкулеску (см. теорему 2.21). Мы ограничимся двумя модельными примерами, которые соответствуют следующим характеристам:

- $\mathbb{T}^1 \ni u \mapsto \frac{1}{1-\alpha(u-1)}$, где $\alpha \geq 0$. Как функция на группе этот характер записывается в виде

$$\chi(U) = \det(1 - \alpha(U - 1))^{-1}, \quad U \in U(\infty). \quad (11.8)$$

- $\mathbb{T}^1 \ni u \mapsto 1 + \beta(u - 1)$, где $\beta \in [0, 1]$. Как функция на группе этот характер записывается в виде

$$\chi(U) = \det(1 + \beta(U - 1)), \quad U \in U(\infty). \quad (11.9)$$

Представления, соответствующие всем остальным функциям Войкулеску, можно по свести к этим двум случаям, используя бесконечные тензорные произведения.⁸¹ Для построения двух искомых сферических представлений мы используем представление Вейля и спинорное представление, построенные в предыдущей лекции.

⁸¹Нужно еще реализовать факторпредставления, связанные с параметром γ ; это также возможно.

Напомним, что представление Вейля алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2N, \mathbb{R})$ и спинорное представление алгебры Ли $\mathfrak{o}(2N)$ действуют в пространствах $T^+\mathbb{C}^N = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ и $T^-\mathbb{C}^N = \Lambda[z_1, \dots, z_N]$ соответственно. На комплексификациях этих алгебр представления были заданы явными формулами (10.10). Эти представления являются унитаризуемыми (определение 10.8) и интегрируются до представлений групп $Mp(2N, \mathbb{R})$ и $Spin(2N)$. Эти группы являются двулистными накрытиями групп $Sp(2N, \mathbb{R})$ и $O(2N)$ соответственно.

Нам потребуется заменить N на $2N$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ (все комплексные матрицы размера $2N \times 2N$) и зададим два ее вложения: одно в алгебру Ли $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{C})$, другое в алгебру Ли $\mathfrak{o}(4N, \mathbb{C})$. Как и в предыдущей лекции, мы будем писать единообразные формулы для обоих представлений, причем верхний знак всегда будет соответствовать первому представлению, а нижний — второму. Элементы $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ будем записывать в блочном виде $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где A, B, C, D — $N \times N$ матрицы, а элементы $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{o}(4N, \mathbb{C})$ — в виде соответствующих матриц 4×4 . Вложения выглядят следующим образом:

$$\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C}) \ni \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} A & 0 & 0 & B \\ 0 & -D' & \pm B' & 0 \\ \hline 0 & \pm C' & -A' & 0 \\ C & 0 & 0 & D \end{array} \right). \quad (11.10)$$

Здесь как и раньше штрих означает транспонирование. Легко проверить, что условия (10.1) выполнены, поэтому правая матрица действительно лежит в $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathfrak{o}(4N, \mathbb{C})$).

Для последних алгебр мы располагаем представлениями в $T^\pm \mathbb{C}^{2N}$, см. формулы (10.10), задающие представление на базисных элементах. Ограничивая эти представления на подалгебру $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$, мы получим два ее представления, действующих в тех же пространствах $T^\pm \mathbb{C}^{2N}$.

Выпишем их в явном виде. Пространство $\mathbb{C}^{2N}$ будем рассматривать как $\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N$, и в $T^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ операторы умножения и дифференцирования⁸² обозначим через $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_N, z_1, \dots, z_N$ и $\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_N, \partial_1, \dots, \partial_N$ соответственно. Тогда действие на базисных элементах выглядит так:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow -\tilde{z}_j \tilde{\partial}_i \mp \frac{1}{2} \delta_{ij}; & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} &\rightarrow z_i \partial_j \pm \frac{1}{2} \delta_{ij}; \\ \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \tilde{\partial}_i \partial_j; & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \mp z_i \tilde{z}_j. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Используя подкрутку на одномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$, можно избавиться от множителей $\frac{1}{2}$ и модифицировать представления следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow -\tilde{z}_j \tilde{\partial}_i \mp \delta_{ij}; & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix} &\rightarrow z_i \partial_j; \\ \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \tilde{\partial}_i \partial_j; & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} & 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \mp z_i \tilde{z}_j. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Рассмотрим две различные вещественные формы алгебры $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ — $\mathfrak{u}(N, N)$ и $\mathfrak{u}(2N)$. Напомним, что они состоят из матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, таких, что $A = -A^*$, $D = -D^*$, $C = \pm B^*$ (плюс отвечает $\mathfrak{u}(N, N)$, минус — $\mathfrak{u}(2N)$).

Замечание 11.21. Это соответствует тому, что алгебру $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{R})$ можно реализовать как $\mathfrak{sp}(4N, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(2N, 2N)$, а $\mathfrak{o}(4N)$ — как $\mathfrak{o}(4N, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(4N)$.

⁸²В случае некоммутативной алгебры $T^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ — левого умножения и левого дифференцирования.

Определение 11.22. Введем в $T_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ градуировку, полагая $\deg z_i = 1$ и $\deg \tilde{z}_i = -1$ для всех $i = 1, \dots, N$. Через $T_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ обозначим подалгебру элементов нулевой степени.

Легко проверить, что подалгебра $T_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ инвариантна относительно $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$. Кроме того, можно показать, что представление $\mathfrak{gl}(2N, \mathbb{C})$ в $T_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ неприводимо.

Замечание 11.23. Алгебра $T_0^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ имеет конечную размерность, поэтому неприводимое представление определяется старшим весом. Модуль $T_0^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ имеет вес $(\underbrace{1, \dots, 1}_N, 0, \dots)$. В

случае бесконечномерного модуля $T_0^+(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ также можно говорить о старшем весе, и он равен $(\underbrace{-1, \dots, -1}_N, 0, \dots)$. В обоих случаях вектор старшего веса есть $\mathbf{1}$.

Предложение 11.24. Представления вещественных алгебр Ли $\mathfrak{u}(N, N)$ в $T_0^+(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ и $\mathfrak{u}(2N)$ в $T_0^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ интегрируются до представлений групп $U(N, N)$ и $U(2N)$ соответственно.

Определение 11.25. Обозначим первое из представлений в предыдущем предложении через W_N , а второе — через S_N . Отметим, что S_N действует в конечномерном пространстве $T_0^-(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$, в то время как W_N — в гильбертовом пополнении пространства $T_0^+(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$.

В пространстве $T_0^\pm(\mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N)$ есть выделенный вектор $\mathbf{1}$. Рассмотрим его матричный элемент.

Предложение 11.26. Имеем

$$\left(W_N \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{1} \right) = (\det a)^{-1}, \quad \left(S_N \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{1} \right) = \det a, \quad (11.13)$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ лежит в $U(N, N)$ или $U(2N)$, соответственно.

Идея доказательства. Мы рассмотрим только случай представления S_N . В случае представления W_N следует действовать аналогично, однако это требует обоснований, так как представление бесконечномерно.

В силу своей конечномерности, унитарное представление S_N группы $U(2N) \subset GL(2N, \mathbb{C})$ продолжается до комплексно-аналитического представления группы $GL(2N, \mathbb{C})$. Рассмотрим треугольное разложение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.14)$$

Тогда, пользуясь формулами (11.12), можно увидеть, что

$$\left(S_N \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{1} \right) = \left(S_N \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix} \mathbf{1}, \mathbf{1} \right), \quad (11.15)$$

(отметим, что матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 1 \end{pmatrix}$ надо перекинуть на второй вектор $\mathbf{1}$ и транспонировать).

Далее, из (11.12) видно, что элемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{pmatrix}$ сохраняет $\mathbf{1}$. Значит, остается элемент $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, но опять-таки из (11.12) видно, что он умножает $\mathbf{1}$ на $\det a$. $\square$

11.4 Построение сферических представлений

Наша цель — построить представления бесконечномерной унитарной группы $U(\infty)$, отвечающие характерам $\chi(U) = \det(1 - \alpha(U - 1))^{-1}$ и $\chi(U) = \det(1 + \beta(U - 1))$, $U \in U(\infty)$. Мы будем строить соответствующие сферические представления, что, как объясняется в начале лекции, эквивалентно. Рассмотрим пару Гельфанда (G, K) , где $G = U(\infty) \times U(\infty)$ и $K \subset G$ — диагональ, $K \cong U(\infty)$.

Все конструкции, описанные в предыдущем подразделе при построении представлений W_N и S_N (определение 11.25), выстраиваются в индуктивные пределы. Таким путем мы получаем представление W_∞ группы $U(\infty, \infty)$, а также представление S_∞ группы $U(2\infty)$. Отметим, что обе эти группы состоят из операторов, отличающихся от единицы на конечномерный оператор. А именно, они состоят из блочных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, которые псевдоунитарны либо унитарны, причем операторы $a - 1, b, c$ и $d - 1$ конечномерны.

До сих пор в наших построениях отсутствовали непрерывные параметры; сейчас они появятся. Для произвольного $t \in \mathbb{R}$ мы определим вложение дубля $G = U(\infty) \times U(\infty)$ в группы $U(\infty, \infty)$ и $U(2\infty)$, зависящие от t . Разберем сначала случай $U(\infty, \infty)$. Рассмотрим однопараметрическую группу гиперболических поворотов

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \in U(1, 1). \quad (11.16)$$

Интерпретируя $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$ как бесконечномерные скалярные операторы, можно сказать, что гиперболические повороты лежат в $\bar{U}(\infty, \infty)$ — *полной псевдоунитарной группе*, состоящей из операторов вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для которых выполняется условие псевдоунитарности и на операторы a, b, c, d не накладывается никаких дополнительных условий, кроме ограниченности. См. также §10.6. Отметим, что полная группа $\bar{U}(\infty, \infty)$ действует сопряжениями на группе $U(\infty, \infty)_1$ — пополнении группы $U(\infty, \infty)$ по ядерной норме.

Вложение $G \hookrightarrow U(\infty, \infty)$ (зависящее от параметра t) имеет вид

$$G \ni (U_1, U_2) \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & -\operatorname{sh} t \\ -\operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \in U(\infty, \infty). \quad (11.17)$$

Обозначим образ (U_1, U_2) через $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Легко проверяется, что эта матрица действительно лежит в группе $U(\infty, \infty)$ (а не только в $U(\infty, \infty)_1$). В частности, $a = \operatorname{ch}^2 t U_2 - \operatorname{sh}^2 t U_1$, и $a - 1$ — финитная матрица, так как $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

Рассмотрим матричный элемент, отвечающий $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ при представлении Вейля W_∞ (предложение 11.26 остается в силе). Он равен

$$(\det a)^{-1} = (\det U_2)^{-1} \det(1 - \operatorname{sh}^2 t (U_1 U_2^{-1} - 1))^{-1} \quad (11.18)$$

Множитель $(\det U_2)^{-1}$ можно отбросить, домножив все представление на одномерное. Обозначая $\operatorname{sh}^2 t = \alpha \geq 0$, видим, что мы получили требуемое сферическое представление, отвечающее характеру бесконечномерной унитарной группы $\chi(U) = \det(1 - \alpha(U - 1))^{-1}$. Как объясняется в начале лекции, этому сферическому представлению соответствует конечное факторпредставление с нужным характером.

Рассмотрим теперь второй случай. Здесь надо вкладывать дубль G в группу $U(2\infty)$ и пользоваться спинорным представлением вместо представления Вейля. Также вместо гиперболических поворотов следует использовать обычные, они лежат в *полной унитарной группе* $\bar{U}(2\infty)$

и действуют сопряжениями на $U(2\infty)_1$. В результате имеем

$$G \ni (U_1, U_2) \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in U(2\infty). \quad (11.19)$$

В левом верхнем углу этой матрицы будет стоять оператор $a = \cos^2 t U_2 + \sin^2 t U_1$, и матричный элемент спинорного представления будет иметь вид (см. предложение 11.26):

$$\det a = \det U_2 \det (1 + \sin^2 t (U_1 U_2^{-1} - 1)). \quad (11.20)$$

Множитель $\det U_2$, как и выше, не играет роли, так как отвечает одномерному представлению $U(\infty)$, и поэтому его можно не учитывать. Обозначая $\sin^2 t = \beta$, видим, что мы построили искомое сферическое представление, отвечающее характеру $\chi(U) = \det(1 + \beta(U - 1))^{-1}$. Ему соответствует искомое конечное фактор-представление, как объясняется в начале лекции.

Замечание 11.27. Отметим, что в конечномерном случае «подкрутка» на поворот или гиперболический поворот не меняет представления,⁸³ так как это сопряжение является внутренним автоморфизмом. В бесконечномерном случае этот автоморфизм уже не является внутренним, что объясняет, почему в результате получается не эквивалентное представлению. Важное обстоятельство состоит в том, что «подкрутка» устроена так, что она оставляет неподвижными все элементы диагональной подгруппы K ; именно благодаря этому вектор $\mathbf{1}$ будет K -инвариантным.

Замечание 11.28. Мы видели, что теория фактор-представлений и теория неприводимых унитарных представлений приводят к одному и тому же результату, если ограничиваться конечными факторами и сферическими представлениями. Однако, в других задачах эти два подхода уже расходятся. Например, можно изучать более общие фактор-представления, не являющиеся конечными. С другой стороны, можно интересоваться не обязательно сферическими неприводимыми представлениями и не обязательно только парами Гельфанда (G, K) с $G = K \times K$, где $K \cong K$ — диагональ. Последних имеется три: $K = U(\infty), SO(\infty), Sp(\infty)$, но есть еще семь других (например, $G = U(\infty)$, $K = SO(\infty)$, и т. п.). Все они связаны с римановыми симметрическими пространствами компактного типа. Первые три пары приводят к фактор-представлениям, а остальные 7 — нет.

12 Случайные матрицы и точечные процессы

12.1 Круговой унитарный ансамбль

В этой лекции мы переходим к новому сюжету, связанному со случайными матрицами и случайными точечными процессами. Для начала рассмотрим одну из первых моделей в теории случайных матриц — *круговой унитарный ансамбль Дайсона* (Dyson's circular unitary ensemble, CUE) [Dys62]. Когда говорят о случайных матрицах, имеют в виду вероятностную меру на каком-то пространстве матриц. Таким образом, случайная матрица — это случайный элемент этого пространства, распределенный согласно данной вероятностной мере.

Определение 12.1. Круговой унитарный ансамбль Дайсона задается нормированной мерой Хаара на унитарной группе $U(N)$.

Одним из основных объектов изучения в теории случайных матриц является спектр (набор собственных значений), который, естественно, также является случайным. Спектр унитарной матрицы $U \in U(N)$ — это неупорядоченный набор N чисел на единичной окружности,

$$\{u_1, \dots, u_N\} \subset \mathbb{T}^1. \quad (12.1)$$

⁸³Точнее, класс эквивалентности представления.

Если матрица $U \in U(N)$ принадлежит ансамблю Дайсона (то есть, распределена по нормированной мере Хаара), то совместное распределение собственных значений имеет вид

$$P(du_1 \dots du_N) = \text{const} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} |u_i - u_j|^2 d\theta_1 \dots d\theta_N, \quad (12.2)$$

где $d\theta_1 \dots d\theta_N$ — мера Лебега на торе $\mathbb{T}^N$ (мы считаем, что $u_j = e^{i\theta_j}$), а const — нормировочный множитель.

В теории случайных матриц изучается предельное поведение набора случайных точек $\{u_1, \dots, u_N\}$ на окружности, когда $N \rightarrow \infty$. Ясно, что с ростом N плотность точек возрастает. Можно раздуть окружность, так что ее радиус станет равным N , тогда средняя плотность точек будет равна единице. Можно изучать асимптотику расстояния между двумя соседними точками, а также многие другие вопросы — модель Дайсона оказывается очень богатой.

12.2 γ -модель

Ансамбль Дайсона описывает распределение меры Хаара унитарной группы $U(N)$ по классам сопряженных элементов. Нас же будут интересовать модели, связанные с двойственным к $U(N)$ объекту, т.е. представлениями этой группы.

Один из возможных вариантов построения таких моделей таков. Пусть π — конечномерное представление группы $U(N)$, тогда оно раскладывается в сумму неприводимых:

$$\pi = \bigoplus_{i \in I} m_i \pi_{\lambda^{(i)}}, \quad (12.3)$$

где $\pi_{\lambda^{(i)}}$ — неприводимое представление, соответствующее сигнатуре $\lambda^{(i)} \in \text{Sign}(N)$ (см. теорему 1.16), а m_i — кратности. Индекс i пробегает какое-то конечное множество I . Ясно, что

$$\dim \pi = \sum_{i \in I} m_i \dim \pi_{\lambda^{(i)}}, \quad (12.4)$$

и поэтому с разложением представления π на неприводимые можно связать вероятностную меру на конечном подмножестве в $\text{Sign}(N)$:

$$P = \frac{1}{\dim \pi} \sum_{i \in I} m_i \dim \pi_{\lambda^{(i)}} \delta_{\lambda^{(i)}}, \quad (12.5)$$

где $\delta_{\lambda^{(i)}}$ — дельта-мера, сосредоточенная на сигнатуре $\lambda^{(i)}$.

Эквивалентное определение: рассмотрим нормированный характер представления π и разложим его по неприводимым нормированным характерам (которые являются нормированными полиномами Шура, см. лекцию 1):

$$\chi_\pi = \sum_{i \in I} \tilde{c}_{\lambda^{(i)}} \tilde{s}_{\lambda^{(i)}}, \quad \tilde{c}_{\lambda^{(i)}} \geq 0, \quad \sum_{i \in I} \tilde{c}_{\lambda^{(i)}} = 1. \quad (12.6)$$

Тогда

$$P = \sum \tilde{c}_i \delta_{\lambda^{(i)}}.$$

Эту простую конструкцию можно слегка обобщить. Вспомним пространство $\Upsilon(U(N))$ центральных положительно определенных нормированных функций на $U(N)$ (см. лекции 8 и 11). Это счетномерный симплекс, вершины которого нумеруются сигнатурами из $\text{Sign}(N)$. Каждый элемент $\chi \in \Upsilon(U(N))$ однозначно задает вероятностную меру на $\text{Sign}(N)$: Мы выписываем каноническое разложение

$$\chi = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \tilde{s}_\lambda, \quad \tilde{c}_\lambda \geq 0, \quad \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda = 1. \quad (12.7)$$

и затем полагаем

$$P = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \delta_\lambda.$$

Здесь уже видна аналогия между двумя моделями. А именно, в первой модели (ансамбль Дайсона) возникала случайная N -ка точек на окружности $\mathbb{T}^1$, а во второй модели — случайная N -ка на решетке $\mathbb{Z}$ целых чисел, двойственной к $\mathbb{T}^1$. Эта аналогия будет углубляться по мере дальнейшего изучения второй модели.

Конкретизируем теперь вторую модель: возьмем в качестве $\chi \in \Upsilon(U(N))$ ограничение на $U(N)$ характера Войкулеску группы $U(\infty)$ (см. 2.21), отвечающего параметру $\gamma = \gamma^+$ (при этом все остальные параметры считаем равными нулю). Напомним, что этот характер задается следующей функцией Войкулеску:

$$\Psi(u) = e^{\gamma(u-1)}. \quad (12.8)$$

При ограничении на $U(N)$ возникает функция на группе

$$\chi(U) = \prod_{k=1}^N \Psi(u_k), \quad U \in U(N), \quad (12.9)$$

где $\{u_1, \dots, u_k\}$ — собственные значения матрицы U . Зададимся вопросом, какая вероятностная мера соответствует этой функции $\chi \in \Upsilon(U(N))$ в смысле (12.7). Другими словами, мы хотим разложить произведение (12.9) в сумму по нормированным функциям Шура $\tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N)$. Ответ дает следующее предложение. В нем используется обозначение $l_i := \lambda_i + N - i$; отметим, что все l_i различны.

Предложение 12.2. *Имеем*

$$\prod_{k=1}^N e^{\gamma(u_k-1)} = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} \tilde{c}_\lambda \tilde{s}_\lambda(u_1, \dots, u_N), \quad (12.10)$$

где коэффициенты $\tilde{c}_\lambda$ имеют вид

$$\tilde{c}_\lambda = \frac{e^{-N\gamma} \gamma^{-\frac{N(N-1)}{2}}}{1!2! \dots (N-1)!} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{\gamma^{l_i}}{l_i!} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} (l_i - l_j)^2. \quad (12.11)$$

Если какое-то из l_i отрицательно, то $\tilde{c}_\lambda = 0$.

Отметим, что в этой формуле, так же, как в (12.2), возникает квадрат определителя Вандермонда.

Доказательство. Достаточно найти разложение по обычным (не нормированным) функциям Шура

$$\prod_{k=1}^N e^{\gamma(u_k-1)} = \sum_{\lambda \in \text{Sign}(N)} c_\lambda s_\lambda(u_1, \dots, u_N), \quad (12.12)$$

поскольку коэффициенты $\tilde{c}_\lambda$ и c_λ связаны следующим образом:

$$\tilde{c}_\lambda = c_\lambda \cdot \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (l_i - l_j)}{0!1!2! \dots (N-1)!}, \quad (12.13)$$

см., например, лекцию 3.

Далее, воспользуемся формулой (7.42), в которую подставим

$$\Psi(u) = e^{\gamma(u-1)} = e^{-\gamma} e^{\gamma u} = \sum_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{\gamma^l}{l!} e^{-\gamma}. \quad (12.14)$$

Тогда получим

$$c_\lambda = \det \left[\frac{\gamma^{\lambda_i - i + j}}{(\lambda_i - i + j)!} e^{-\gamma} \right]_{i,j=1}^N = e^{-\gamma N} \gamma^{\sum l_i} \gamma^{-\frac{N(N-1)}{2}} \cdot \det \left[\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]_{i,j=1}^N. \quad (12.15)$$

Остается вычислить последний детерминант. Умножим и поделим его i -ю строку на $l_i! = (\lambda_i + N - i)!$, получим

$$\det \left[\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]_{i,j=1}^N = \frac{1}{\prod l_i!} \cdot \det \left[l_i^{\downarrow(N-j)} \right]_{i,j=1}^N. \quad (12.16)$$

Здесь $l_i^{\downarrow(N-j)} = l_i(l_i - 1) \dots (l_i - N + j + 1)$ — убывающая факториальная степень. Теперь заметим, что в $\det[l_i^{\downarrow(N-j)}]$ факториальные степени можно заменить обычными, и получим, что это — определитель Вандермонда, равный $\prod_{1 \leq i < j \leq N} (l_i - l_j)$. Собирая все формулы вместе, видим, что предложение доказано. $\square$

Замечание 12.3. Отметим, что функцию $\chi \in \Upsilon(U(N))$, определенную формулой (12.9), можно получить и из других соображений. А именно, воспользуемся двойственностью Шура–Вейля. Рассмотрим пространство $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$, в котором действует группа $U(N)$.⁸⁴ Пусть $\chi^{(n)}$ — характер представления $U(N)$ в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\chi^{(n)}(u_1, \dots, u_N) = (u_1 + \dots + u_N)^n. \quad (12.17)$$

Теперь *рандомизируем* n , то есть, сделаем число n случайным, распределенным по закону Пуассона с параметром $\nu > 0$,

$$\text{Prob}(n) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!}, \quad (12.18)$$

и затем возьмем математическое ожидание. Другими словами, мы рассматриваем следующую функцию на группе $U(N)$ (также ясно, что она входит в $\Upsilon(U(N))$):

$$\chi(U) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!} \chi^{(n)}(U). \quad (12.19)$$

Оказывается, эта функция совпадает с (12.9), а параметры связаны соотношением $\gamma = \frac{\nu}{N}$ (см. упражнение 12.1).

Замечание 12.4. Отметим, что вероятностную меру, построенную в предложении 12.2, можно рассматривать не только как меру на N -ках целых чисел вида $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ (то есть, на сигнатурах), а также как меру на N -ках вида $(l_1, \dots, l_N) \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Отметим, что все l_i различны, в то время как некоторые из λ_i могут совпадать.

12.3 Точечные процессы

Изложим формализм, охватывающий описанные выше модели и многие другие.

Пусть $\mathfrak{X}$ — дискретное пространство, которое может быть конечным или счетным (например, $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}$ или $\mathfrak{X} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ или $\mathfrak{X} = \{1, 2, \dots, N\}$).

Определение 12.5. (Точечной) *конфигурацией* в $\mathfrak{X}$ называется любое подмножество $X \subseteq \mathfrak{X}$. Мы считаем, что в одной точке множества $\mathfrak{X}$ не может находиться более одной точки конфигурации X .

⁸⁴Группа $U(N)$ действует в каждом $\mathbb{C}^N$ тавтологически, а $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ есть тензорное произведение представлений.

Через $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ обозначим множество всех конфигураций на множестве $\mathfrak{X}$.⁸⁵ Пространство $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ наделяется топологией произведения «двоеточий» $\{0, 1\}$. Это вполне несвязное (totally disconnected) пространство. Разумеется, если $\mathfrak{X}$ конечно, то и $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ тоже конечно.

Определение 12.6. *Точечным процессом* на множестве $\mathfrak{X}$ называется борелевская вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Другими словами, точечный процесс — это случайная конфигурация на множестве $\mathfrak{X}$.

Замечание 12.7. Термин «точечный процесс» является не совсем удачным, однако он является общепринятым. Также точечные процессы иногда называют *точечными случайными полями*.

Если множество $\mathfrak{X}$ конечно, то точечный процесс на $\mathfrak{X}$ можно задать, просто определив вероятности всех конфигураций. Это также возможно, если $\mathfrak{X}$ счетно, но число точек в конфигурации фиксировано, или если мера сосредоточена на подмножестве конечных конфигураций.

Например, обозначим через $\text{Conf}_N(\mathfrak{X})$ множество всех N -точечных конфигураций в $\mathfrak{X}$. Множество всех сигнатур длины N — $\text{Sign}(N)$ — можно отождествить с множеством $\text{Conf}_N(\mathbb{Z})$ (сигнатуре $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ соответствует множество $\{l_1, \dots, l_N\}$, где $l_i = \lambda_i + N - i$). Нашу γ -модель можно рассматривать как меру на $\text{Conf}_N(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, то есть, как N -точечный процесс в $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. В предложении 12.2 мы как раз вычислили вероятность каждой отдельной конфигурации.

Однако, может случиться, что мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ не имеет атомов, то есть, вероятность каждой отдельной фиксированной конфигурации равна нулю. Ясно, что тогда меру нельзя определить путем задания вероятности каждой конфигурации. В следующем подразделе мы введем язык, позволяющий описывать такие неатомические меры.

12.4 Корреляционные функции

Пусть $\text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$ — множество всех конечных конфигураций. Если $A, B \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$, причем $A \subseteq B$, то через $U(A, B)$ обозначим множество $\{X \in \text{Conf}(\mathfrak{X}) : X \cap B = A\}$. Другими словами, $U(A, B)$ — это множество таких (не обязательно конечных) конфигураций в $\mathfrak{X}$, пересечение которых с «окном» B совпадает с A . Ясно, что в топологии пространства $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ множества $U(A, B)$ являются одновременно открытыми и замкнутыми, и они составляют базу топологии $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Отсюда следует, что любая борелевская мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ полностью определяется своими значениями на множествах вида $U(A, B)$.

Определение 12.8. Пусть P — борелевская вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Определим функцию на всех конечных конфигурациях

$$\rho : \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(C) := P\{X : X \supseteq C\}. \quad (12.20)$$

Другими словами, $\rho(C)$ — вероятность того, что случайная конфигурация X содержит множество C . Также можно сказать, что $\rho(C)$ — вероятность того, что в точках конечного множества $C \subset \mathfrak{X}$ окажутся точки случайной конфигурации.

Функция ρ называется *корреляционной функцией* точечного процесса P .

Предложение 12.9. *Корреляционная функция ρ однозначно определяет точечный процесс P .*

Доказательство. Пусть $C \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$. Обозначим множество $\{X : X \supseteq C\} \subset \text{Conf}(\mathfrak{X})$ через $V(C)$. Фиксируем $A, B \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$, $A \subseteq B$. Запишем следующую формулу, вытекающую из метода включений–исключений:

$$U(A, B) = \sum_{C : A \subseteq C \subseteq B} (-1)^{|C| - |A|} V(C), \quad (12.21)$$

⁸⁵Более привычное обозначение — $\{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$, однако, мы будем писать $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

где сумма рассматривается как операция над мультимножествами в $\mathfrak{X}$. Так как множества $U(A, B)$ полностью определяют меру, а их мера выражается через корреляционную функцию, предложение доказано. $\square$

Корреляционную функцию $\rho: \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ можно рассматривать как совокупность функций $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $\mathfrak{X}^n$, где

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \rho(\{x_1, \dots, x_n\}). \quad (12.22)$$

Функция ρ_n называется *n-точечной*, или *n-частичной* корреляционной функцией. По определению, ρ_n — симметрическая функция.

Функция $\rho_1(x)$, $x \in \mathfrak{X}$, носит специальное название — *функция плотности*. Ясно, что $\rho_1(x)$ — вероятность обнаружить частицу в точке x , $\rho_2(x_1, x_2)$ — вероятность наличия частиц в двух данных различных точках x_1, x_2 и так далее.

Корреляционные функции являются гибким инструментом описания точечных процессов.

12.5 Детерминантные точечные процессы

Перейдем к рассмотрению важного класса точечных процессов — детерминантных точечных процессов.

Определение 12.10. Точечный процесс P называется *детерминантным*, если существует функция $K: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}$, такая, что для любого $n = 1, 2, \dots$ выполнено

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n. \quad (12.23)$$

Функция $K(x, y)$ называется корреляционным ядром.

Можно сказать, что $\det K_X := \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$ — минор матрицы K размера $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$.

Более подробно определение 12.10 означает, что

$$\begin{aligned} \rho_1(x_1) &= K(x_1, x_1), \\ \rho_2(x_1, x_2) &= \begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (12.24)$$

и так далее.

Замечание 12.11. Общий точечный процесс полностью определяется счетным набором корреляционных функций с растущим числом аргументов $n = 1, 2, 3, \dots$, а детерминантный точечный процесс определяется только одной функцией от двух переменных. Тем самым, для задания детерминантного процесса нужно гораздо меньше информации, чем для задания общего процесса.

Замечание 12.12. Вопрос о том, как по корреляционным функциям $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ определить, является ли точечный процесс детерминантным, является открытым.

Замечание 12.13. Корреляционное ядро K определяется неоднозначно. Например, его «калибровка»

$$K(x, y) \mapsto \varphi(x)K(x, y)\varphi(y)^{-1}, \quad (12.25)$$

где φ — любая не обращающаяся в нуль функция на $\mathfrak{X}$, не меняет корреляционных функций (и тем самым не меняет точечного процесса). Кроме того, если ядро K не симметрично, то его можно транспонировать, это также не меняет корреляционных функций. Неясно, есть ли другие сколько-нибудь общие преобразования ядра, которые также не меняют корреляционных функций.

Можно показать, что модель Дайсона и γ -модель, определенные выше, являются детерминантными точечными процессами.

Мы далее рассмотрим один специальный класс N -точечных процессов и докажем его детерминантность.

12.6 Ортогональный полиномиальный ансамбль

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — дискретное подмножество $\mathbb{R}$ (например, решетка $\mathbb{Z}$ или полурешетка $\mathbb{Z}_{\geq 0}$). Будем предполагать, что $\mathfrak{X}$ счетно; в случае конечного множества ситуация только проще. Пусть W — всюду положительная функция на $\mathfrak{X}$, у которой существуют все моменты:

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} |x|^n W(x) < \infty \quad \text{для всех } n = 1, 2, \dots \quad (12.26)$$

Функция W называется *весовой функцией*.

Оказывается, по функции W для каждого $N = 1, 2, \dots$ можно построить N -точечный процесс в $\mathfrak{X}$ (то есть, вероятностную меру на $\text{Conf}_N(\mathfrak{X})$). Он оказывается детерминантным. Такой точечный процесс называется *N -точечным ортогональным ансамблем* с весом W . Вероятность конфигурации $X \in \text{Conf}_N(\mathfrak{X})$ определяется как

$$P(X) := \text{const} \cdot \prod_{x \in X} W(x) \cdot V_N^2(X), \quad (12.27)$$

где $V_N^2(X)$ — квадрат определителя Вандермонда переменных $x \in X$. Отметим, что $V_N^2(X)$ не зависит от нумерации точек $x \in X$. Здесь и далее через const мы обозначаем различные нормировочные константы.

Предложение 12.14. *Мера (12.27) существует и является детерминантной.*

Теперь введем некоторые дополнительные обозначения, которые требуются, чтобы описать корреляционное ядро процесса P .

Рассмотрим *весовое* вещественное гильбертово пространство

$$\ell^2(\mathfrak{X}, W) := \left\{ f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}, \|f\|^2 := \sum_{x \in \mathfrak{X}} |f(x)|^2 W(x) < \infty \right\} \quad (12.28)$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_W := \sum_{x \in \mathfrak{X}} f(x)g(x)W(x). \quad (12.29)$$

Конечность всех моментов веса W означает, что пространство полиномов $\mathbb{R}[x]$ отображается в $\ell^2(\mathfrak{X}, W)$. Поскольку $\mathfrak{X}$ счетно, ядро этого отображения тривиально, т.е. $\mathbb{R}[x]$ является подпространством в $\ell^2(\mathfrak{X}, W)$.

От весового пространства можно перейти к обычному:

$$\ell^2(\mathfrak{X}, W) \rightarrow \ell^2(\mathfrak{X}), \quad f \mapsto f\sqrt{W}. \quad (12.30)$$

Поэтому $\mathbb{R}[x]\sqrt{W} \subset \ell^2(\mathfrak{X})$.

В пространстве $\mathbb{R}[x]\sqrt{W}$ рассмотрим подпространство размерности N :

$$\text{span} \{1, x, x^2, \dots, x^{N-1}\} \sqrt{W} \subset \ell^2(\mathfrak{X}). \quad (12.31)$$

Через K обозначим оператор ортогонального проектирования на это подпространство. В $\ell^2(\mathfrak{X})$ существует канонический базис $\{e_x\}$, $e_x(y) = \delta_{xy}$, и в этом базисе оператор K записывается $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ матрицей.

Предложение 12.15. *Матрица K является корреляционным ядром процесса (12.27).*

Будем доказывать предложения 12.14 и 12.15 одновременно.

Доказательство. Применим процесс ортогонализации Грама–Шмидта к векторам $1, x, x^2, \dots \in \ell^2(\mathfrak{X}, W)$. В результате получим ортогональные многочлены $p_0, p_1, p_2, \dots$. Отметим, что переход от $\{x^i\}$ к $\{p_i\}$ представляет собой треугольное преобразование. Нормируем $\{p_i\}$ так, чтобы они были ортонормальны:

$$(p_n, x^k)_W = (p_n, p_k)_W = 0 \quad \text{для всех } k < n, \quad \deg p_n = n, \quad (p_n, p_n)_W = 1. \quad (12.32)$$

Положим

$$\varphi_i(x) := p_{i-1}(x) \sqrt{W(x)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (12.33)$$

Ясно, что

$$\text{span} \{1, x, x^2, \dots, x^{N-1}\} \sqrt{W} = \text{span} \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\} \subset \ell^2(\mathfrak{X}). \quad (12.34)$$

Легко видеть, что формулу (12.27) для меры P можно переписать так:

$$P(x) = \text{const} \cdot (\det [\varphi_i(x_j)]_{i,j=1}^N)^2. \quad (12.35)$$

Также ясно, что матрица ортопроектора $K(x, y)$ на подпространство $\text{span} \{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ имеет вид

$$K(x, y) = \sum_{i,j=1}^N \varphi_i(x) \varphi_i(y), \quad x, y \in \mathfrak{X}. \quad (12.36)$$

Теперь можно непосредственно перейти к вычислению корреляционных функций процесса P . Пусть $n \leq N$, фиксируем множество $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathfrak{X}$. Будем вычислять корреляционную функцию $\rho(Y)$. Все вычисления далее справедливы с точностью до умножения на константу. Ясно, что

$$\rho(Y) = \sum_{Z: |Z|=k} P(Y \sqcup Z), \quad (12.37)$$

где $k := N - n$. Заменим суммирование по Z на суммирование по $z_1, \dots, z_k$, это приведет к появлению множителя $\frac{1}{k!}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \rho(Y) = \text{const} \cdot \frac{1}{k!} \sum_{z_1, \dots, z_k \in \mathfrak{X}} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_N) \\ (j_1, \dots, j_N) \in \mathfrak{S}_N}} \pm \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \varphi_{i_{n+1}}(z_1) \dots \varphi_{i_{n+k}}(z_k) \times \\ \times \varphi_{j_1}(y_1) \dots \varphi_{j_n}(y_n) \varphi_{j_{n+1}}(z_1) \dots \varphi_{j_{n+k}}(z_k). \end{aligned} \quad (12.38)$$

Здесь $\mathfrak{S}_N$ — симметрическая группа, а $\pm$ — произведение знаков перестановок $(i_1, \dots, i_N)$ и $(j_1, \dots, j_N)$. Отметим, что в суммах выше мы можем предполагать, что числа $z_1, \dots, z_k$ пробегают все множество $\mathfrak{X}$, так как если какое-то из z_m совпадет с каким-то из y_l , в определителе в (12.35) возникнет две одинаковые строки, и он будет равен нулю. В сумме выше это означает, что соответствующие слагаемые взаимно уничтожатся (ср. с более мощным методом инволюции в лемме 6.8).

В сумме (12.38) просуммируем сначала по $z_1, \dots, z_k \in \mathfrak{X}$. Ясно, что возникнут суммы вида

$$\sum_{z_1 \in \mathfrak{X}} \varphi_{i_{n+1}}(z_1) \varphi_{j_{n+1}}(z_1) = (\varphi_{i_{n+1}}, \varphi_{j_{n+1}})_{\ell^2(\mathfrak{X})} = \delta_{i_{n+1}, j_{n+1}} \quad \text{в силу ортонормальности.} \quad (12.39)$$

Так как множество $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ можно перенумеровать $k!$ способами, множитель $\frac{1}{k!}$ уходит. Кроме того, ясно, что как множества, $\{i_1, \dots, i_n\} = \{j_1, \dots, j_n\}$. Поэтому получаем

$$\rho(Y) = \text{const} \cdot \sum_{\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_n\}} \pm \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \varphi_{j_1}(y_1) \dots \varphi_{j_n}(y_n). \quad (12.40)$$

Здесь $\pm$ — знак перестановки $I \rightarrow J$ ($I = \{i_1, \dots, i_n\}$ и $J = \{j_1, \dots, j_n\}$ — две нумерации одного и того же множества). Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ — перестановка, такая, что $j_{\sigma(1)} = i_1, \dots, j_{\sigma(n)} = i_n$. Тогда

$$\rho(Y) = \text{const} \sum_{\sigma=(i_1, \dots, i_n) \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn } \sigma \cdot \varphi_{i_1}(y_1) \dots \varphi_{i_n}(y_n) \varphi_{i_1}(y_{\sigma(1)}) \dots \varphi_{i_n}(y_{\sigma(n)}) \quad (12.41)$$

Теперь можно считать, что числа $i_1, \dots, i_n$ — любые от 1 до N , а не обязательно различные (если какие-то два числа совпадают, то соответствующие слагаемые взаимно уничтожаются). Поэтому, суммируя по $i_1, \dots, i_n$ от 1 до N и пользуясь (12.36), получим

$$\rho(Y) = \text{const} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn } \sigma K(y_1, y_{\sigma(1)}) \dots K(y_n, y_{\sigma(n)}) = \text{const} \cdot \det [K(y_i, y_j)]_{i,j=1}^n. \quad (12.42)$$

Константа здесь на самом деле равна единице, так как можно проделать все те же рассуждения для $Y = \emptyset$, и ясно, что $\rho(\emptyset) = \sum_{Z \in \text{Conf}_N(\mathfrak{X})} P(\emptyset \sqcup Z) = 1$. $\square$

Замечание 12.16. На самом деле, мы доказали более сильное утверждение. А именно, если K — матрица произвольного N -мерного проектора в пространстве $\ell^2(\mathfrak{X})$ (где счетное дискретное множество $\mathfrak{X}$ уже не обязательно вложено в $\mathbb{R}$), то существует единственный N -точечный детерминантный процесс с ядром K . Ясно, что для N -точечного процесса мера $P(X)$ каждой конфигурации совпадает с N -частичной корреляционной функцией, поэтому этот процесс можно описать следующим образом:

$$P(X) = \det K_X, \quad |X| = N, \quad (12.43)$$

где $K_X = [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^N$ — соответствующая подматрица.

12.7 Упражнения

Упражнение 12.1. Докажите утверждение в конце замечания 12.3 о том, что функцию χ (12.9) можно также получить как характер представления $U(N)$ в $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ со случайным n .

13 Точечные процессы. Продолжение

В этой лекции мы продолжим заниматься точечными процессами. Сначала обсудим некоторые дальнейшие свойства корреляционных функций точечных процессов (см. определение 12.8), а затем перейдем к описанию детерминантных процессов с эрмитово-симметричным корреляционным ядром (определение 12.10).

13.1 Некоторые замечания о корреляционных функциях

Напомним, что все происходит на конечном или счетном дискретном пространстве $\mathfrak{X}$. Точечный процесс — это вероятностная мера P на множестве конфигураций $\text{Conf}(\mathfrak{X}) := \{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$.⁸⁶ Корреляционная функция $\rho: \text{Conf}_{fin} \rightarrow \mathbb{R}_+$ определяется на всех конечных множествах по формуле $\rho(A) = P(X: X \supseteq A)$, $A \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})$. При этом ρ — функция множества. Другой способ понимать этот объект — говорить, что ρ — это набор функций $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$, где ρ_n — функция на множестве

$$\tilde{\mathfrak{X}}^n := \underbrace{\mathfrak{X} \times \dots \times \mathfrak{X}}_n \setminus \{x_i = x_j: 1 \leq i \neq j \leq n\}. \quad (13.1)$$

⁸⁶Конфигурации мы считаем множествами, а не мультимножествами, поэтому не может быть двух частиц в одной точке.

Другими словами, $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ — это декартова степень $\mathfrak{X}^n$, из которой выкинуты все диагонали вида $\{x_i = x_j\}$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Функции ρ_n и ρ связаны следующим образом: $\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \rho(\{x_1, \dots, x_n\})$, где все x_i попарно различны.

Замечание 13.1. Мы будем предполагать, что корреляционные функции ρ_n зависят от попарно различных аргументов.

Замечание 13.2. Можно также считать, что $\rho_n = 0$, если $x_i = x_j$ для некоторых $1 \leq i \neq j \leq n$, и мы этим будем пользоваться.

Ясно также, что каждая из функций ρ_n является симметрической.

Напомним (предложение 12.9), что корреляционные функции определяют точечный процесс однозначно.

Замечание 13.3. Отметим, что это утверждение справедливо, если пространство $\mathfrak{X}$ дискретно, однако на непрерывных пространствах в некоторых исключительных ситуациях оно может быть неверным. Как правило, все же, корреляционные функции однозначно задают точечный процесс.

Более явное задание точечного процесса дают следующие функции. Пусть $B \subseteq \mathfrak{X}$ — конечное множество («окно»). Положим

$$\pi_{B,m}(x_1, \dots, x_m) := P(X : X \cap B = \{x_1, \dots, x_m\}), \quad (13.2)$$

где $x_1, \dots, x_m$ попарно различны. Другими словами, $\pi_{B,m}(x_1, \dots, x_m)$ — вероятность, что в «окне» B частицы точечного процесса располагаются строго в точках $x_1, \dots, x_m$. Ясно, что функции $\pi_{B,m}$ однозначно определяют точечный процесс.

Замечание 13.4. Ясно, что $\pi_{B,m}(x_1, \dots, x_m) = P(U(A, B))$, где $A = \{x_1, \dots, x_m\}$. Напомним, что $U(A, B)$ определено в начале §12.4. Также отметим, что $\rho(x_1, \dots, x_n) = P(V(C)) = P(U(C, C))$, где $C = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $V(C) = \{X \in \text{Conf}(\mathfrak{X}) : X \supseteq C\}$.

Из формулы включений-исключений (12.21), связывающей множества $U(A, B)$ и $V(C)$, следует связь между функциями $\pi_{B,m}$ и корреляционными функциями:

$$\pi_{B,m}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{k \geq 0} \sum_{y_1, \dots, y_k \in B} \frac{(-1)^k}{k!} \rho_{m+k}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k), \quad (13.3)$$

где вторая сумма ведется по упорядоченным наборам точек $y_1, \dots, y_k \in B$ (отсюда и возникает множитель $\frac{1}{k!}$, которого нет в (12.21)). Здесь мы пользуемся соглашением из замечания 13.2 для корреляционных функций ρ_{m+k} . Отметим, что так как множество B конечно, то сумма по k выше также на самом деле конечная.

Замечание 13.5. Отметим, что корреляционные функции ведут себя более простым образом при некоторых естественных преобразованиях точечного процесса. Рассмотрим одно такое преобразование — ограничение процесса на подмножество.

Пусть $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ — подмножество. Естественным образом определяется ограничение конфигураций на $\mathfrak{X}'$:

$$\text{Conf}(\mathfrak{X}) \ni X \mapsto X' := X \cap \mathfrak{X}' \in \text{Conf}(\mathfrak{X}'). \quad (13.4)$$

Также возникает отображение мер на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ в меры на $\text{Conf}(\mathfrak{X}')$. Таким образом, по процессу P на $\mathfrak{X}$ строится процесс P' на $\mathfrak{X}'$. Оказывается (упражнение 13.1), что корреляционные функции ρ'_n процесса P' получаются просто путем ограничения корреляционных функций ρ_n процесса P на подмножество $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$.

Отметим, что поведение функций $\pi_{B,m}$ при ограничении процесса столь просто не описывается.

13.2 Корреляционные меры

Здесь мы покажем, что корреляционные функции ρ_n более естественно понимать как (возможно, бесконечные) меры на $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ (множество $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ определяется по формуле (13.1)). Отметим, что на дискретных пространствах есть соблазн не различать функции и меры, однако в некоторых ситуациях различие становится необходимым.

Определение 13.6. Конфигурации $X \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$ иногда удобно отождествлять с соответствующими считающими мерами,

$$\delta_X := \sum_{x \in X} \delta_x, \quad (13.5)$$

где δ_x — дельта-мера Дирака в точке $x \in \mathfrak{X}$. Отметим, что мера δ_X может быть бесконечной.

Таким образом, мы получаем вложение $\text{Conf}(\mathfrak{X}) \hookrightarrow \text{Meas}(\mathfrak{X})$ множества конфигураций на $\mathfrak{X}$ в множество мер на $\mathfrak{X}$. Точечный процесс — это вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, ее можно интерпретировать как случайную меру, то есть, как вероятностную меру на $\text{Meas}(\mathfrak{X})$.

С помощью меры δ_X на $\mathfrak{X}$ можно определить корреляционные меры следующим образом. Множество $X \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$ предполагается случайным, распределенным по мере P (то есть, X — случайная конфигурация точечного процесса P). По случайной конфигурации X строится случайная мера δ_X на $\mathfrak{X}$ (определение 13.6). На пространстве $\mathfrak{X}^n$ можно рассмотреть произведение мер δ_X , обозначаемое $\delta_X^{\otimes n}$. Меру $\delta_X^{\otimes n}$ ограничим на множество $\tilde{\mathfrak{X}}^n$, определенное формулой (13.1), то есть, определим меру

$$\tilde{\delta}_X^{\otimes n} := \delta_X^{\otimes n}|_{\tilde{\mathfrak{X}}^n}. \quad (13.6)$$

Ясно, что $\tilde{\delta}_X^{\otimes n}$ — случайная мера на $\tilde{\mathfrak{X}}^n$. Рассмотрим ее математическое ожидание $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ относительно распределения P конфигурации $X \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$, то есть,

$$\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n}) := \sum_{Y \in \text{Conf}(\mathfrak{X})} P(Y) \tilde{\delta}_Y^{\otimes n}, \quad (13.7)$$

где сумма ведется по всем неслучайным конфигурациям $Y \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Понятно, что $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ является неслучайной мерой на $\tilde{\mathfrak{X}}^n$.

Предложение 13.7. Мера $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ на $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ совпадает с ρ_n . Другими словами, вес, который мера $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ приписывает точке $(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{\mathfrak{X}}^n$, равен $\rho_n(x_1, \dots, x_n)$, где ρ_n — n -ая корреляционная функция процесса P .

Определение 13.8. Мера $\mathbb{E}_P(\tilde{\delta}_X^{\otimes n})$ называется n -ой корреляционной мерой точечного процесса P . Мы обозначаем ее также через ρ_n .⁸⁷

Доказательство предложения 13.7. Общий принцип, лежащий в основе доказательства подобных утверждений, состоит в следующем. Сперва надо рассмотреть специальный случай, когда мера P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ является дельта-мерой, сосредоточенной на какой-то фиксированной конфигурации $X \in \text{Conf}(\mathfrak{X})$. После этого можно перейти к общему случаю, пользуясь линейностью математического ожидания. См. также упражнение 13.2. $\square$

13.3 Аддитивные и мультипликативные функционалы

Точечный процесс P — это вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Здесь мы рассмотрим два типа «разумных» функций на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, интегралы от которых по мере P можно достаточно просто выразить через корреляционные функции процесса P . Функции на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ будем называть *функционалами*, чтобы отличать их от собственно функций на пространстве $\mathfrak{X}$ (либо $\mathfrak{X}^n$).

⁸⁷На дискретном пространстве $\tilde{\mathfrak{X}}^n$ меры и функции — это близкие объекты.

Определение 13.9. Пусть f — неотрицательная функция на $\mathfrak{X}^n$ ($n = 1, 2, \dots$). По функции f строится *аддитивный функционал*

$$F_f(X) := \sum_{x_1, \dots, x_n \in X} f(x_1, \dots, x_n), \quad (13.8)$$

где сумма ведется по упорядоченным наборам попарно различных точек $x_1, \dots, x_n \in X$. Отметим, что F_f может принимать значение $+\infty$, если ряд расходится.

Замечание 13.10. В правой части (13.8) сумма ведется по всем упорядоченным наборам попарно различных индексов $x_1, \dots, x_n \in X$, Это отличается от суммы вида

$$\sum_{A \subset X, |A|=n} f(A), \quad (13.9)$$

где сумма ведется по всем n -точечным подмножествам $A \subseteq X$.

Подобным образом, для корреляционных функций две суммы,

$$\sum_{A \in \text{Conf}_{fin}(\mathfrak{X})} \rho(A) \quad \text{и} \quad \sum_{n \geq 0} \sum_{x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{X}} \rho_n(x_1, \dots, x_n) \quad (13.10)$$

(во второй сумме суммирование ведется по всем упорядоченным наборам попарно различных индексов), являются разными.

Замечание 13.11. Ясно, что аддитивный функционал F_f зависит только от *симметрической части* функции f ,

$$f^{sym}(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \quad (13.11)$$

Поэтому на самом деле пространство аддитивных функционалов порождается функционалами F_f , где $f = g^{\otimes n}$, то есть, $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1) \dots g(x_n)$ (принцип поляризации в линейной алгебре).

Предложение 13.12. Имеем⁸⁸

$$\langle F_f, P \rangle = \langle f, \rho_n \rangle, \quad (13.12)$$

где через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначен интеграл функции по мере.

Доказательство. Упражнение 13.3. □

Определение 13.13. Пусть φ — финитная функция (то есть, отличная от нуля лишь в конечном числе точек). Определим *мультипликативный функционал*

$$\Phi_\varphi(X) := \prod_{x \in X} (1 + \varphi(x)). \quad (13.13)$$

Отметим, что это произведение всегда фактически конечно.

Ясно, что $\Phi_\varphi(X)$ можно разложить в сумму аддитивных функционалов:

$$\Phi_\varphi(X) = 1 + \sum_{n \geq 1} F_{\varphi^{\otimes n}}(X). \quad (13.14)$$

Так как φ — финитная функция, то сумма на самом деле конечна. Ясно, что также можно выразить и интеграл $\langle \Phi_\varphi, P \rangle$ от мультипликативного функционала по мере P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ через корреляционные функции процесса P .

⁸⁸Утверждается, что либо обе части равенства конечны и равны друг другу, либо они обе равны $+\infty$.

13.4 Корреляционные функции как факториальные моменты

Наиболее «простыми» функционалами на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ являются следующие. Пусть $A \subset \mathfrak{X}$ — конечное подмножество. Определим функционал

$$\mathcal{N}_A(X) := |X \cap A|, \quad (13.15)$$

то есть, $\mathcal{N}_A(X)$ — это число точек конфигурации X , попавшей в «окно» A .

Если задан точечный процесс, то есть, вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, то $\mathcal{N}_A$ становится случайной величиной на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Предложение 13.14. *Для любого конечного подмножества $A \subset \mathfrak{X}$ имеем*

$$\langle \mathcal{N}_A^{\downarrow n}, P \rangle = \rho_n(A^n). \quad (13.16)$$

Здесь $\langle \mathcal{N}_A^{\downarrow n}, P \rangle = \mathbb{E}_P(\mathcal{N}_A^{\downarrow n})$ — математическое ожидание случайной величины $\mathcal{N}_A^{\downarrow n}$, $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_n$ и $y^{\downarrow n} := y(y-1)\cdots(y-n+1)$ — факториальная степень.

Доказательство. Пусть χ_A — характеристическая функция (индикатор) множества A . Определим функцию f на $\mathfrak{X}^n$ по формуле $f = \chi_A^{\otimes n}$. Очевидно, что $\langle f, \rho_n \rangle = \rho_n(A^n)$. Запишем, пользуясь предложением 13.12:

$$\langle f, \rho_n \rangle = \mathbb{E}_P(Ff) = \mathbb{E}_P(F_{\chi_A^{\otimes n}}). \quad (13.17)$$

Из определения аддитивного функционала следует, что $F_{\chi_A^{\otimes n}}(X) = \mathcal{N}_A^{\downarrow n}(X)$. Действительно, надо заметить, что $\mathcal{N}_A^{\downarrow n}(X)$ — это число способов выбрать упорядоченный набор из n различных точек в множестве $A \cap X$. $\square$

Если функции $\mathcal{N}_A$ рассматривать как аналоги координатных функций (на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$), то интегралы их факториальных степеней $\mathcal{N}_A^{\downarrow n}$ по мере P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ можно рассматривать как «чистые факториальные моменты» меры P . Они выражаются через корреляционные функции меры P . Также можно рассматривать «смешанные факториальные моменты», см. упражнение 13.4. Ясно, что обычные моменты можно выразить через факториальные.

13.5 Детерминантные процессы с эрмитово-симметричным ядром

Теперь будем рассматривать детерминантные точечные процессы (определение 12.10), то есть, такие точечные процессы P на $\mathfrak{X}$, что существует (вообще говоря, комплекснозначная) функция двух переменных $K(x, y)$, для которой

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det [K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n. \quad (13.18)$$

Здесь ρ_n — n -ая корреляционная функция процесса P . Отметим, что правая часть равенства выше автоматически симметрична по $x_1, \dots, x_n$ (для любой функции K).

Мы будем рассматривать важный частный случай детерминантных процессов, когда корреляционное ядро $K(x, y)$ является эрмитово-симметричным:

$$K(x, y) = \overline{K(y, x)}, \quad x, y \in \mathfrak{X}. \quad (13.19)$$

Рассмотрим первую и вторую корреляционные функции:

$$\rho_1(x) = P(X \ni x) = K(x, x), \quad \rho_2(x, y) = \rho_1(x)\rho_1(y) - |K(x, y)|^2 \leq \rho_1(x)\rho_2(y). \quad (13.20)$$

Будем интерпретировать точки случайной конфигурации как частицы. Видно, что вероятность одновременного попадания частиц в две точки, x и y , не больше, чем произведение вероятностей этих событий. Это можно толковать как отталкивание частиц друг от друга. Этим обусловлено исторически более раннее название детерминантных процессов — *фермионные процессы* (введенное в работах Масчи).

Замечание 13.15. В работах Масchi также были введены *бозонные процессы*, которые сейчас называются *перманентными*. Их корреляционные функции даются соответствующими перманентами.⁸⁹

13.6 Характеризация эрмитово-симметричных корреляционных ядер

В классе детерминантных процессов с эрмитово-симметричным ядром удастся полностью охарактеризовать матрицы K , которые определяют детерминантные точечные процессы.

Пусть $H = \ell^2(\mathfrak{X})$ — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_x\}_{x \in \mathfrak{X}}$. Любой ограниченный оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ можно отождествить с $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ матрицей $A(x, y) := (Ae_y, e_x)$, так что для всех $\xi \in H$, $\xi = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \xi(x)e_x$, выполнено

$$(A\xi)(x) = \sum_{y \in \mathfrak{X}} A(x, y)\xi(y). \quad (13.21)$$

Другими словами, $A(x, y)$ — ядро «интегрального» оператора в $\ell^2(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathcal{H} \subset H$ — конечномерное подпространство. Пусть $K_{\mathcal{H}}$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{H}$. Это конечномерный оператор, который можно записать в виде

$$K_{\mathcal{H}}(x, y) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x)\varphi_i(y), \quad (13.22)$$

где $N = \dim \mathcal{H}$ и $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

Предложение 13.16. Для любого конечномерного подпространства $\mathcal{H} \subset H$ оператор ортогонального проектирования на $\mathcal{H}$ отвечает детерминантной мере P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, которая сосредоточена на N -точечных конфигурациях, где $N = \dim \mathcal{H}$.

Доказательство. Это доказывается в точности, как предложения 12.14 и 12.15 из предыдущей лекции. $\square$

Наша цель — доказать следующий факт.

Предложение 13.17. Всякий ограниченный самосопряженный оператор $K = K^*$ в $H = \ell^2(H)$, такой, что $0 \leq K \leq 1$ (то есть, $K \geq 0$ и $1 - K \geq 0$),⁹⁰ является корреляционным ядром детерминантного точечного процесса на $\mathfrak{X}$.

Замечание 13.18. Отметим, что конечномерные ортогональные проекторы из предложения 13.16 входят в класс операторов, рассматриваемых в предложении 13.17.

Сначала докажем следующую лемму:

Лемма 13.19. Пусть $0 \leq K = K^* \leq 1$ — оператор в бесконечномерном гильбертовом пространстве H .⁹¹ Тогда существует последовательность конечномерных ортогональных проекторов K_m , слабо сходящаяся к K .

О слабой сходимости операторов можно, например, прочитать в лекции §9.

Доказательство. Воспользуемся тем фактом, что слабая сходимость равномерно ограниченных по норме операторов равносильна сходимости их матричных элементов в фиксированном базисе. Выберем базис $e_1, e_2, \dots$ в H , и рассмотрим конечномерные подпространства

$$H_m := \text{span} \{e_1, \dots, e_m\}. \quad (13.23)$$

⁸⁹Перманент матрицы определяется так же, как детерминант, но только сумма произведений элементов вместо знакопеременной берется обычная.

⁹⁰Можно эквивалентно сказать, что спектр оператора K лежит в $[0, 1]$.

⁹¹Это не обязательно пространство $\ell^2(\mathfrak{X})$.

Пусть $H_m^\perp = H \ominus H_m$ — ортогональное дополнение пространства H_m . Запишем оператор K в блочном виде в базисе $e_1, e_2, \dots$:

$$K = \begin{pmatrix} a & * \\ * & * \end{pmatrix}, \quad (13.24)$$

где матрица a имеет размер $m \times m$. Ясно, что из условия $0 \leq K = K^* \leq 1$ следует, что $0 \leq a = a^* \leq 1$. Рассмотрим $2m \times 2m$ операторы

$$K_m = \begin{pmatrix} a & \sqrt{a(1-a)} \\ \sqrt{a(1-a)} & 1-a \end{pmatrix}. \quad (13.25)$$

Здесь оператор $\sqrt{a(1-a)}$ определен, так как $a(1-a)$ — симметрический положительно определенный оператор. Легко видеть, что $K_m = K_m^* = K_m^2$, поэтому K_m — проектор в H_{2m} . Оператор K_m можно также определить и на H , так как $\mathcal{L}(H_{2m}) \subset \mathcal{L}(H)$ (окаймляя матрицу (13.25) нулями).

Операторы K_m равномерно ограничены по норме, и в базисе $e_1, e_2, \dots$ их матричные элементы сходятся к K . Поэтому $K = \lim_{m \rightarrow \infty} K_m$, что и требовалось. $\square$

Теперь перейдем к доказательству предложения 13.17. Пусть $0 \leq K = K^* \leq 1$ — оператор в $H = \ell^2(\mathfrak{X})$. Пользуясь леммой, построим последовательность операторов K_m , которые слабо сходятся к K . Каждый оператор K_m определяет детерминантную меру $P^{(m)}$ на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$ (предложение 13.16). Меры $P^{(m)}$ заданы на компактном пространстве $\text{Conf}(\mathfrak{X}) = \{0, 1\}^{\mathfrak{X}}$, поэтому семейство $\{P^{(m)}\}$ плотно (tight). Поэтому существует подпоследовательность $P^{(m_i)}$, слабо сходящаяся к вероятностной мере P на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$.

Рассмотрим открытые множества $U(A, B) \subset \text{Conf}(\mathfrak{X})$, определенные в §12.4. Ясно, что $P^{(m_i)}(U(A, B)) \rightarrow P(U(A, B))$, а это влечет сходимость корреляционных функций $\rho^{(m_i)}$ точечных процессов $P^{(m_i)}$ к корреляционной функции ρ точечного процесса P . Из сходимости операторов K_m к K следует, что корреляционная функция ρ дается соответствующими минорами, то есть, что K — корреляционное ядро меры P .

Предложение 13.17 доказана.

13.7 Упражнения

Упражнение 13.1. Пусть точечный процесс P' получен из точечного процесса P на $\mathfrak{X}$ путем ограничения на подмножество $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ (см. замечание 13.5). Покажите, что корреляционные функции P' получаются из корреляционных функций P также путем ограничения на $\mathfrak{X}'$.

Упражнение 13.2. Докажите предложение 13.7.

Упражнение 13.3. Докажите предложение 13.12.

Указание. Воспользуйтесь общим принципом, изложенным в доказательстве предложения 13.7.

Упражнение 13.4. Пусть $A_1, \dots, A_n \subset \mathfrak{X}$ — конечные подмножества, которые попарно дизъюнкты: $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Пусть P — вероятностная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$. Покажите, что

$$\mathbb{E}_P(\mathcal{N}_{A_1}^{\downarrow n_1} \dots \mathcal{N}_{A_k}^{\downarrow n_k}) = \rho_{n_1 + \dots + n_k}(A_1^{n_1} \times \dots \times A_k^{n_k}) \quad (13.26)$$

(см. §13.4).

Упражнение 13.5. Верно ли, что если $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ — два различных конечномерных подпространства в H , то точечные процессы, им отвечающие, тоже различны (см. предложение 13.16)? [Замечание: я еще не продумал этот вопрос должным образом.]

Упражнение 13.6. Пусть P — детерминантная мера на $\text{Conf}(\mathfrak{X})$, построенная в предложении 13.17 по оператору $0 \leq K = K^* \leq 1$ в $\ell^2(\mathfrak{X})$. Покажите, что если $\sum_{x \in \mathfrak{X}} K(x, x) < \infty$, то P сосредоточена на конечных конфигурациях. [Замечание: верно и обратное утверждение, но его доказать труднее.]

Предметный указатель

- алгебра
 - h -сдвинуто-симметрических функций, 35
 - градуированная, 1
 - присоединенная, 34
 - сдвинуто-симметрических функций, 34
 - симметрических функций, 32
 - специализация, 55
 - фильтрованная, 34
- биномиальная формула, 28
- группа
 - бесконечномерная унитарная, 13
- диаграмма
 - Юнга, 30
 - координаты Фробениуса, 45
 - содержание клетки, 30
- доминантность, 7
- задача редукции, 9
- матрица
 - минор, 62
 - подматрица, 62
 - тотально положительная, 62
 - тёплица, 68
- мера
 - Бернулли, 20
 - Хаара, 7
- метод инволюции, 65
- многочлены
 - Лорана, 1
 - антисимметрические, 3
 - симметрические, 2
 - Шура, 27
 - лорановские, 4
 - сдвинуто-симметрические, 30
 - стабильность, 29
 - сдвинуто-симметрические, 33
 - симметрические
 - полные однородные, 18
 - элементарные, 17
- мономы
 - антисимметризованные, 3
 - симметризованные, 2
- мультимножество, 18
- определитель
 - Вандермонда, 3
- последовательность
 - тотально положительная, 68
- правило ветвления, 10
- представлене, 6
- радиальная часть, 9
- разбиение, 26
 - длина, 26
- сигнатура, 2
 - длина, 2
- инфинитезимально-регулярная последовательность, 38
- носитель, 12
- перемежающиеся, 10
- схема Гельфанда–Цетлина, 11
- сходимость функций на T_{fin}^{∞} , 15
- условие
 - финитности, 13
- факториальная степень
 - убывающая, 30
- формула
 - Коши, 56
 - размерности, 16
- функции
 - сдвинуто-симметрические, 34
 - полные, 41
 - элементарные, 41
 - симметрические, 32
 - однородные, 39
 - суммы Ньютона, 39
 - элементарные, 39
 - суперсимметрические, 46
- функции Шура
 - сдвинуто-симметрические, 35
 - симметрические, 33
- характер, 6
 - неприводимый, 7
 - нормированный, 14
 - экстремальный, 15
- числа
 - Костки, 4, 11

Список литературы

- [Dys62] Freeman J. Dyson. Три статьи в J. Math. Phys. 3, 1962.
- [Edr53] A. Edrei. On the generating function of a doubly-infinite, totally positive sequence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74(3):367–383, 1953.
- [Kar68] S. Karlin. *Total Positivity, Vol. 1*. Stanford, 1968.
- [Oko97] Andrei Okounkov. Log-Concavity of Multiplicities with Application to Characters of $U(\infty)$. *Advances in Mathematics*, 127(2):258–282, 1997.
- [Ols03] Grigori Olshanski. The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group. *Journal of Functional Analysis*, 205(2):464–524, 2003.
- [OO98] Andrei Okounkov and Grigori Olshanski. Asymptotics of Jack polynomials as the number of variables goes to infinity. *Int. Math. Res. Notices*, 13:641–682, 1998.
- [Sim05] Barry Simon. *Trace Ideals and Their Applications: Second Edition*, volume 120 of *Mathematical Surveys and Monographs*. 2005.
- [Вей07] Г. Вейль. *Классические группы. Их инварианты и представления*. КомКнига М., 2007.
- [ГК50] Ф.Р. Гантмахер and М.Г. Крейн. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем*. ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1950.
- [ГК65] И. Ц. Гохберг and М. Г. Крейн. *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов*. Москва: Наука, 1965.
- [ГН50] И.М. Гельфанд and М.А. Наймарк. *Унитарные представления классических групп*. Тр. МИАН СССР, т. 36. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1950.
- [Жел07] Д. П. Желобенко. *Компактные группы Ли и их представления*. М:МЦНМО, 2007.
- [Мак84] И. Макдональд. *Симметрические функции и многочлены Холла*. М: Мир, 1984.
- [Сте05] Р.П. Стенли. *Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции*. М: Мир, 2005.
- [Шир07] А.Н. Ширяев. *Вероятность*. М:МЦНМО, 2007.