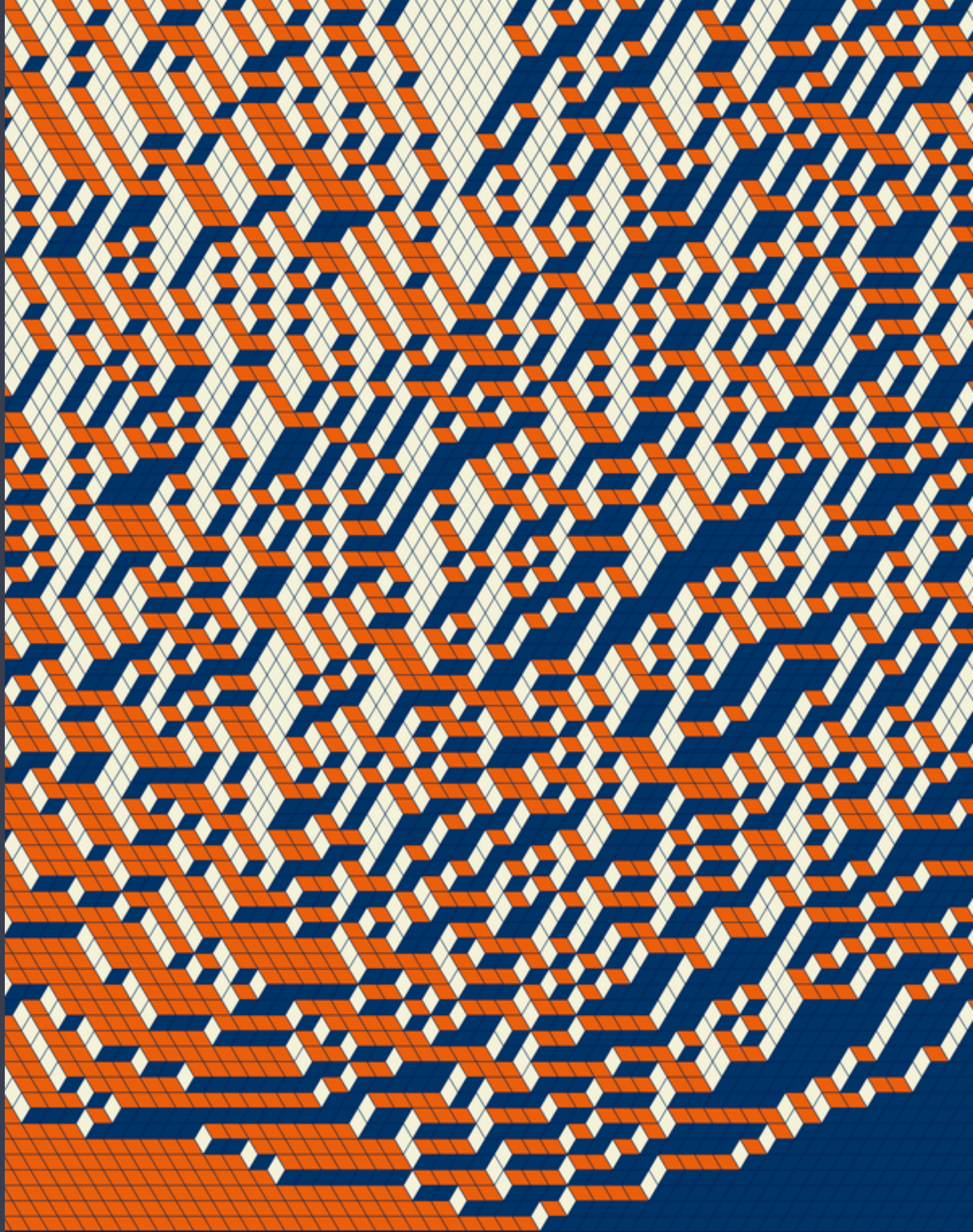
Леонид Петров

ЗАМОЩЕНИЯ РОМБИКАМИ

и их случайные перестройки

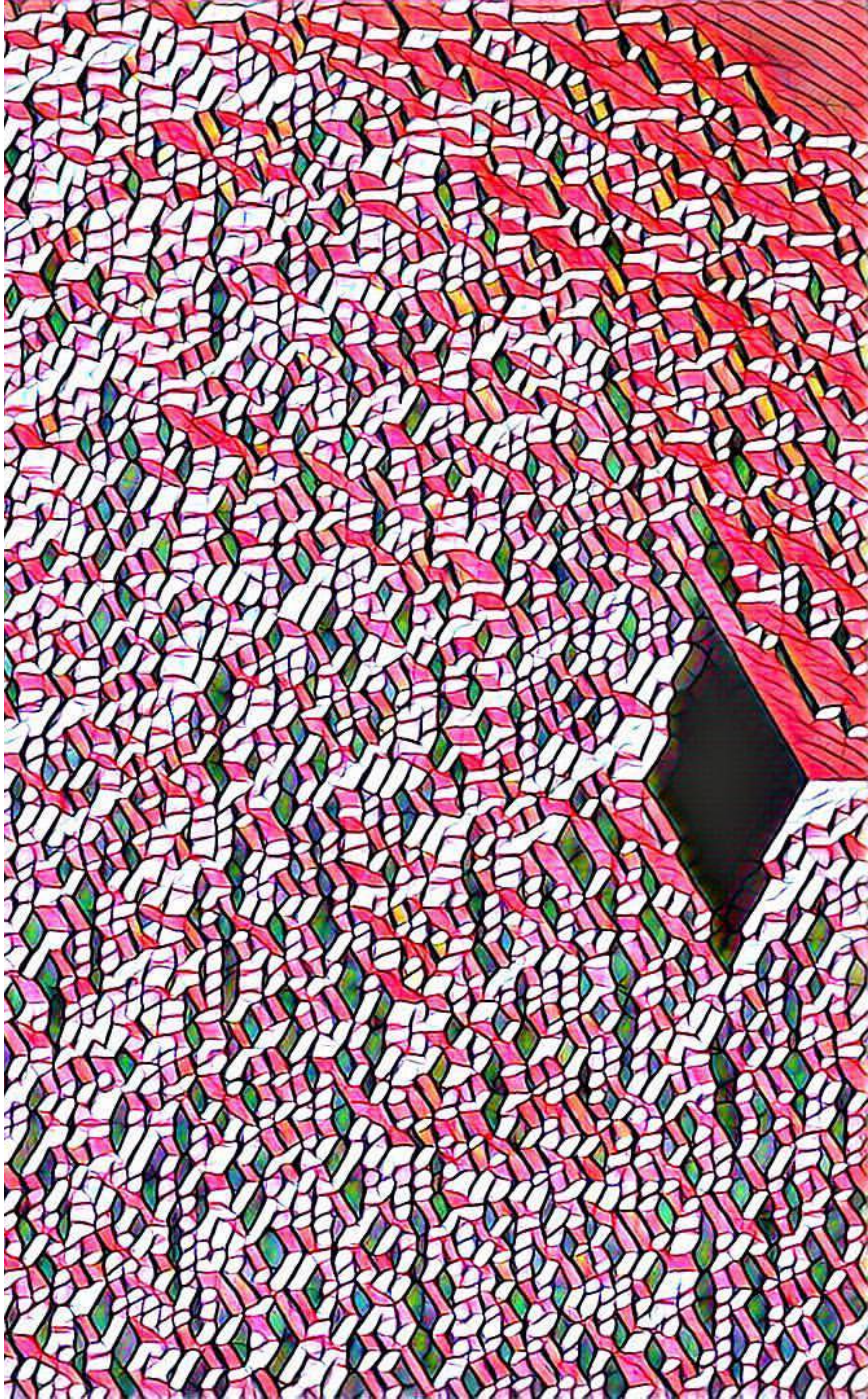
ЛШСМ 2019



О ЧЕМ КУРС

Курс посвящен замощениям многоугольников ромбиками. Будет рассказано три главных сюжета:

- Подсчет числа замощений некоторых многоугольников
- Как выглядят случайные замощения больших многоугольников (обзорно)
- Как рисовать такие красивые картинки ➡️ (идея - использовать случайные элементарные перестройки замощений)



Глава 1

Замощения. Определения и элементарные примеры

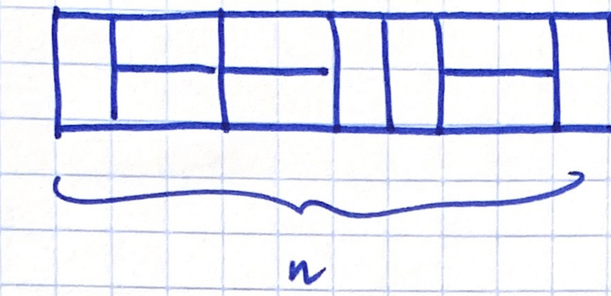
- Определение
- Замощения полосы доминошками
- Ромбики
- Замощаемые шестиугольники
- Трехмерная интерпретация
- Маленькие примеры $c = 1$, $c = 2$
- Лемма Гесселя-Вьенно (случай двух путей)
- Общий ответ - формула МакМагона (докажем во второй главе)
- q-деформация формулы МакМагона
- Замощения всей плоскости (плоские разбиения)
- Вырождение q-формулы МакМагона к плоским разбиениям

Что такое замощения

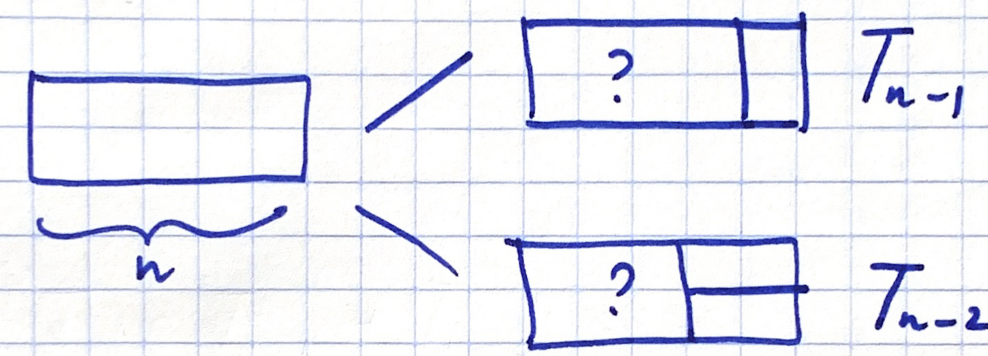
Замощение (иногда говорят “мозаика”) - это представление одной фигуры (обычно на плоскости) в виде объединения фигур из некоторого заданного набора (будем называть их "тайлы", или "плитки"), так что каждая точка исходной фигуры покрыта хотя бы один раз, а сами тайлы могут пересекаться только по границе.

Мы будем рассматривать замощения многоугольников (и прочих довольно простых областей, таких, как полуплоскость) другими, "маленькими" элементарными многоугольниками. Нас будет интересовать подсчет числа замощений, а также (позднее) разные вероятностные вопросы, вроде формы типичного большого замощения.

По-видимому, простейший нетривиальный набор тайлов состоит из двух доминошек - 1×2 и 2×1.



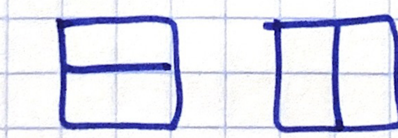
$T_n = \#$ замощений



$T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$

$T_1 = 1$

$T_2 = 2$



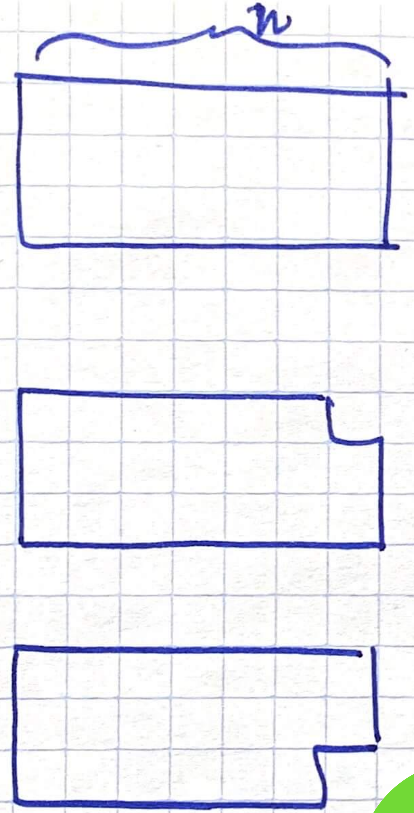
$\Rightarrow$ Числа Фибоначчи

1. Замощения $2 \times n$

A_n

B_n

C_n



$$\begin{cases} A_n = A_{n-2} + B_{n-1} + C_{n-1} \\ B_n = A_{n-1} + B_{n-2} \end{cases}$$

$(B_n = C_n)$

2. Замощения $3 \times n$

Ответ:

$$A_n = \frac{\left((-1)^n + 1\right)\left(\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{n/2} + \left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{n/2}\right)}{4\sqrt{3}}$$

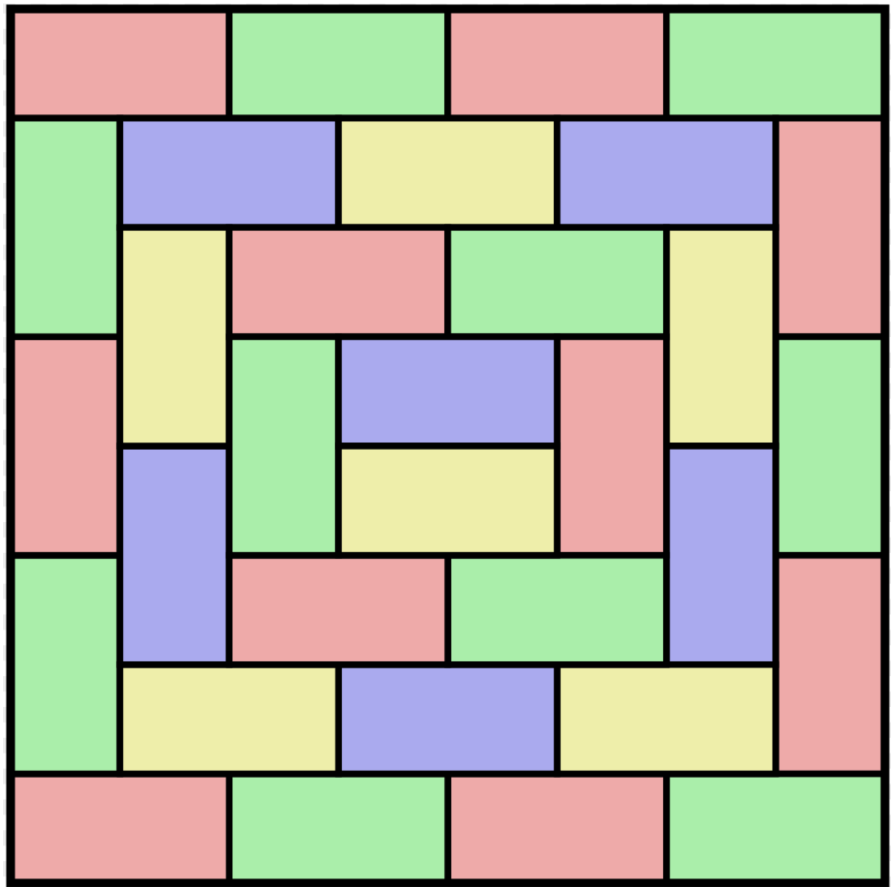
Замечание. Замощения общего многоугольника $m \times n$ можно тоже посчитать, но для этого уже требуются другие методы, см., например, Википедию ⬇️

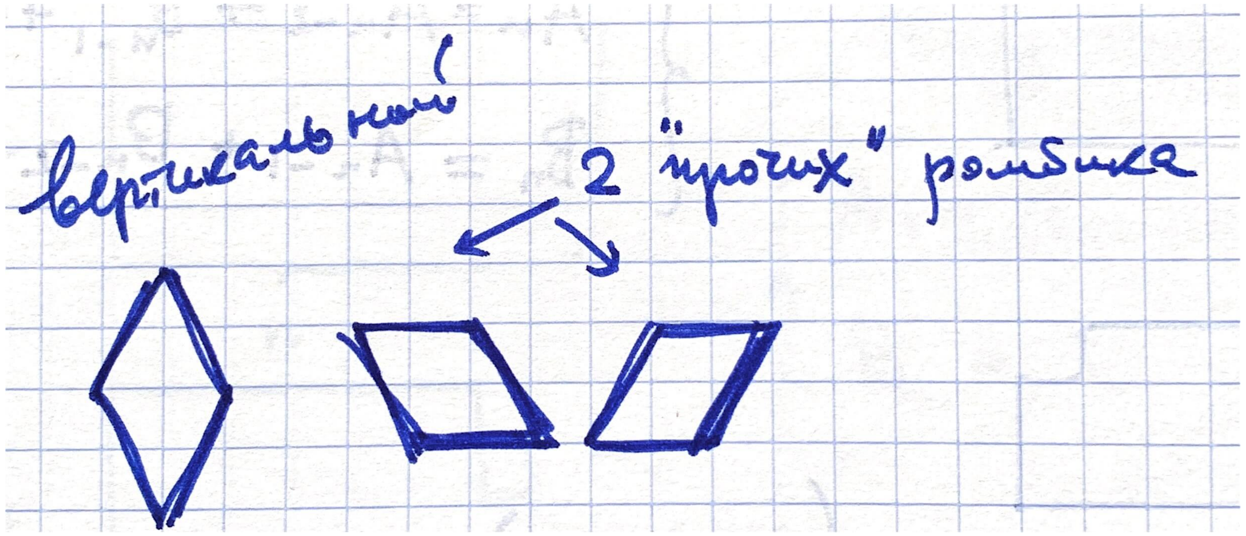
Подсчёт замощений области

Число способов замощения $m \times n$ прямоугольника $\frac{mn}{2}$ костяшками домино вычислили независимо в 1961 году Темперли с Фишером [2] и Кастеляйн,[3] и это число равно

$$\prod_{j=1}^{\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil} \prod_{k=1}^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \left(4\cos^2 \frac{\pi j}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi k}{n+1}\right).$$

Если m и n оба нечётны, формула корректно даёт нулевое число возможных мозаик домино.

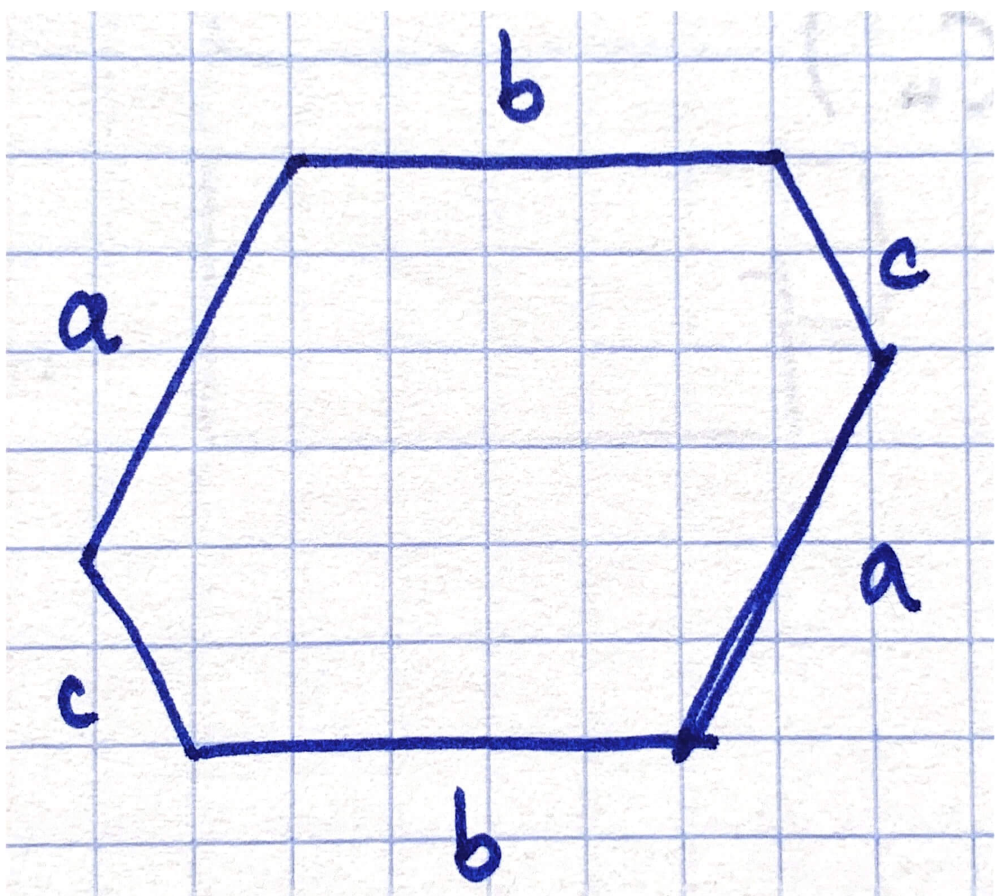




РОМБИКИ

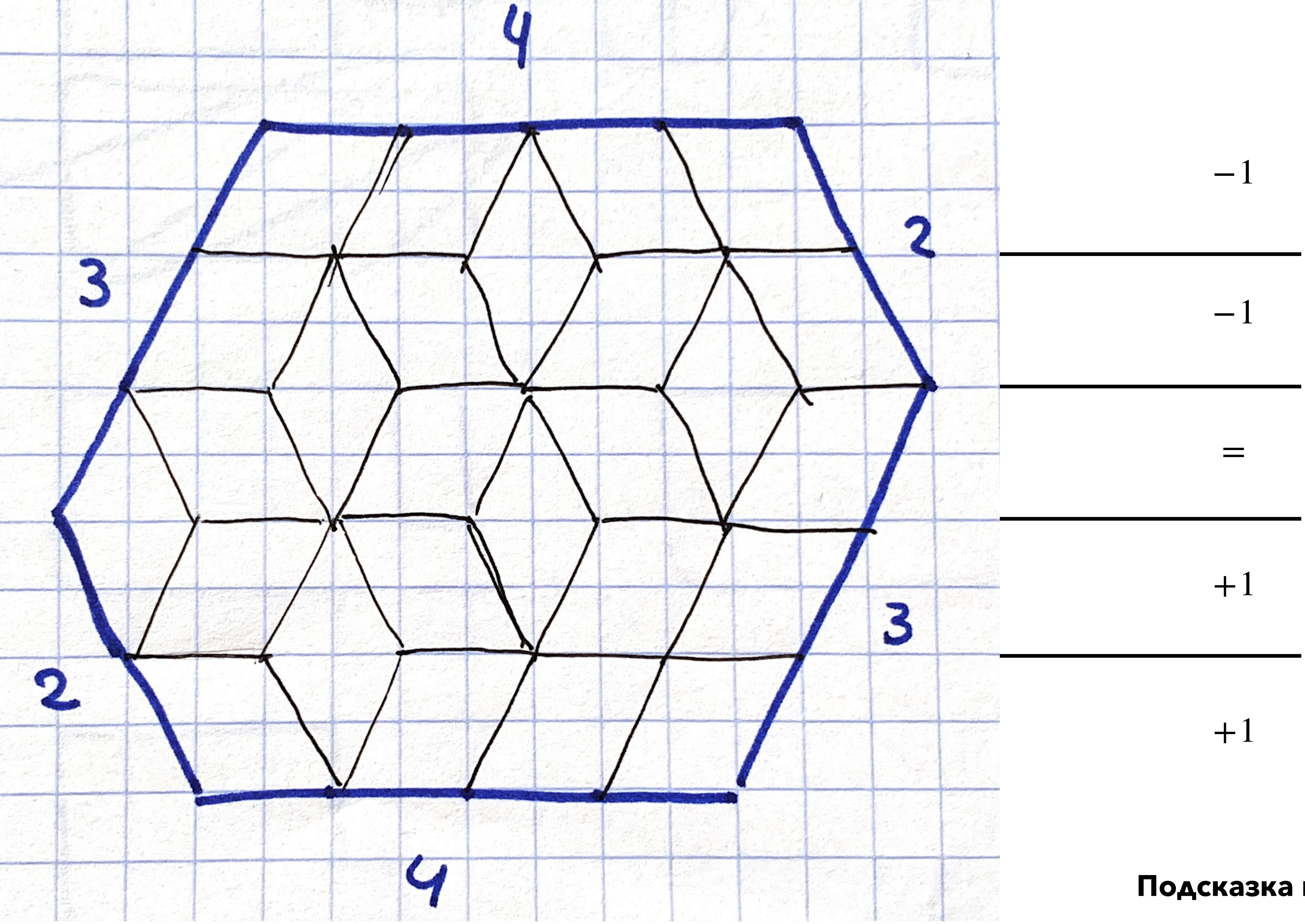
Главный объект первых двух занятий - *замощения многоугольников ромбиками* трех типов. Каждый ромбик - это объединение двух соседних правильных треугольников на треугольной решетке.

Что можно замощать? Давайте замощать многоугольники, которые нарисованы на треугольной решетке. Например, шестиугольники со сторонами a, b, c, a, b, c можно замостить. Обозначение: $\Omega_{a,b,c}$



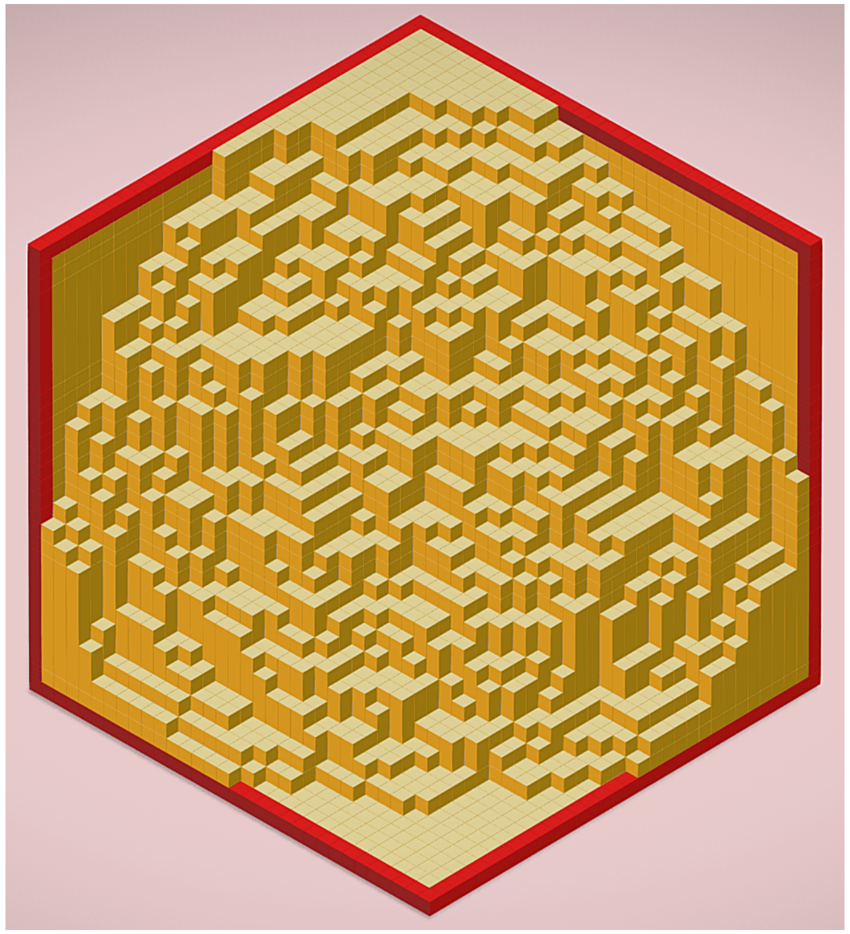
3. Замощаемые шестиугольники

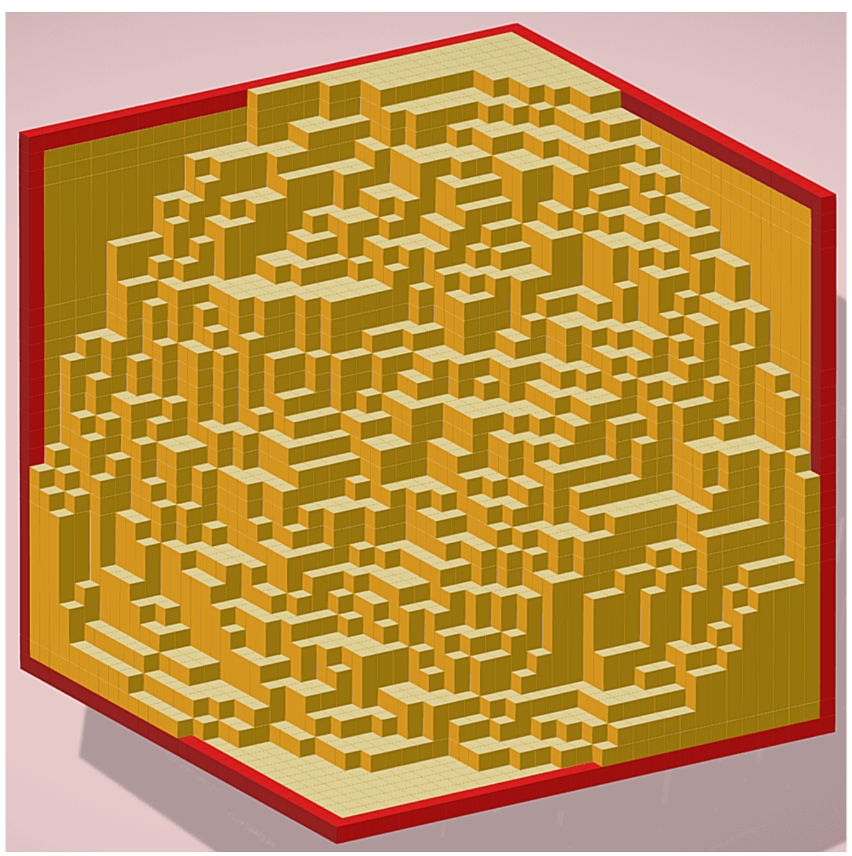
Возьмем шестиугольник на треугольной решетке (то есть, его противоположные стороны параллельны, и стороны имеют целочисленную длину). Его можно замостить ромбиками трех типов тогда и только тогда, когда противоположные стороны равны.



Подсказка к задаче 3.

Если смотреть только на вертикальные ромбики, то в первом ряду снизу будет ровно один, во втором - ровно два, и так далее, пока шестиугольник расширяется в обе стороны. Затем будет несколько горизонтальных рядов, в которых число вертикальных ромбиков не меняется. Наконец, ближе к верхней границе число вертикальных ромбиков от ряда к ряду будет уменьшаться.





ВЗГЛЯД В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

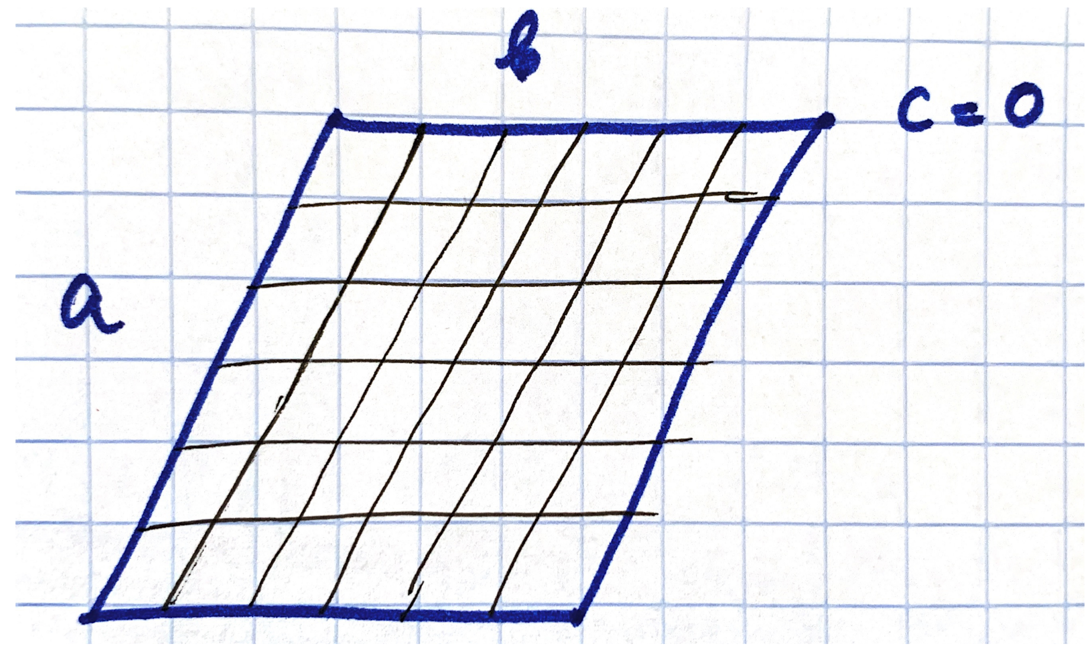
Замощать ромбиками можно разные многоугольники. Замощения некоторых из них (например, шестиугольников) легко интерпретировать как трехмерные поверхности, ограничивающие конфигурации кубиков ⬅️

Трехмерная модель доступна по ссылке [А. Бородин]

Замощения $\Omega_{a,b,c}$, таким образом, находятся во взаимно-однозначном соответствии с конфигурациями кубиков $1 \times 1 \times 1$ внутри параллелепипеда $a \times b \times c$, в которых все кубики сдвинуты в один из углов (без дырок и перекрытий)

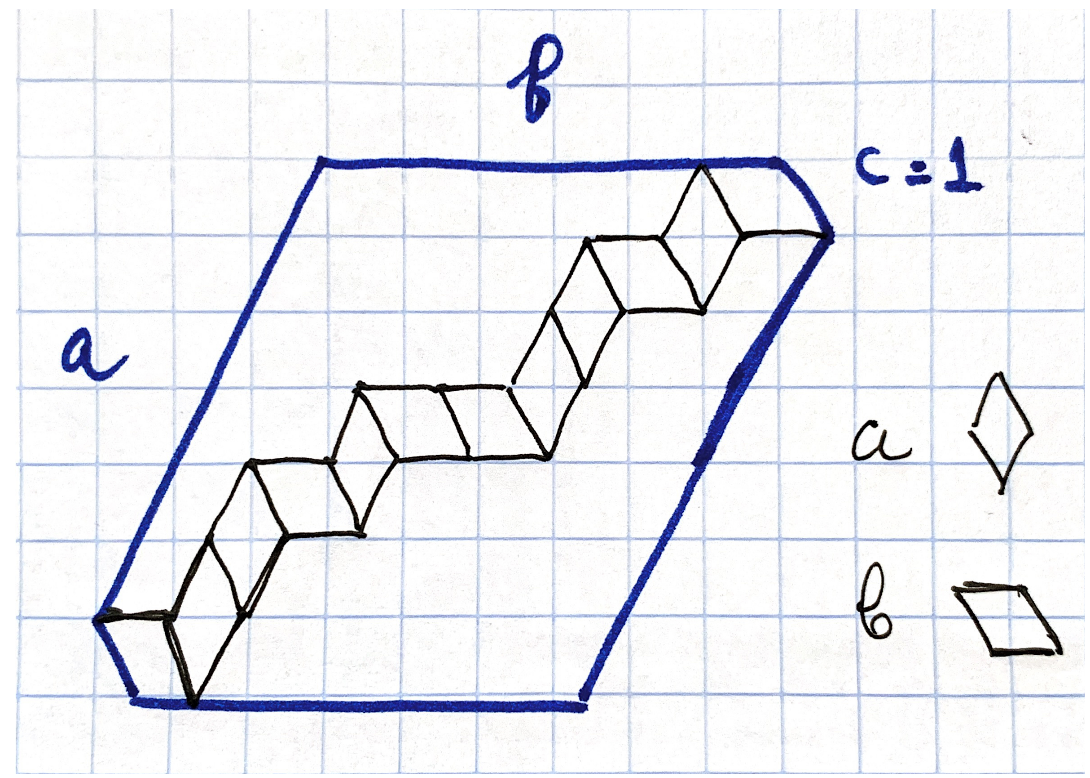
МАЛЕНЬКИЕ ПРИМЕРЫ

Есть только одно (тривиальное) замощение шестиугольника $\Omega_{a,b,0}$



4. Сколько всего замощений $\Omega_{a,b,1}$?

Ответ: $C_{a+b}^{a} = \binom{a+b}{a}$

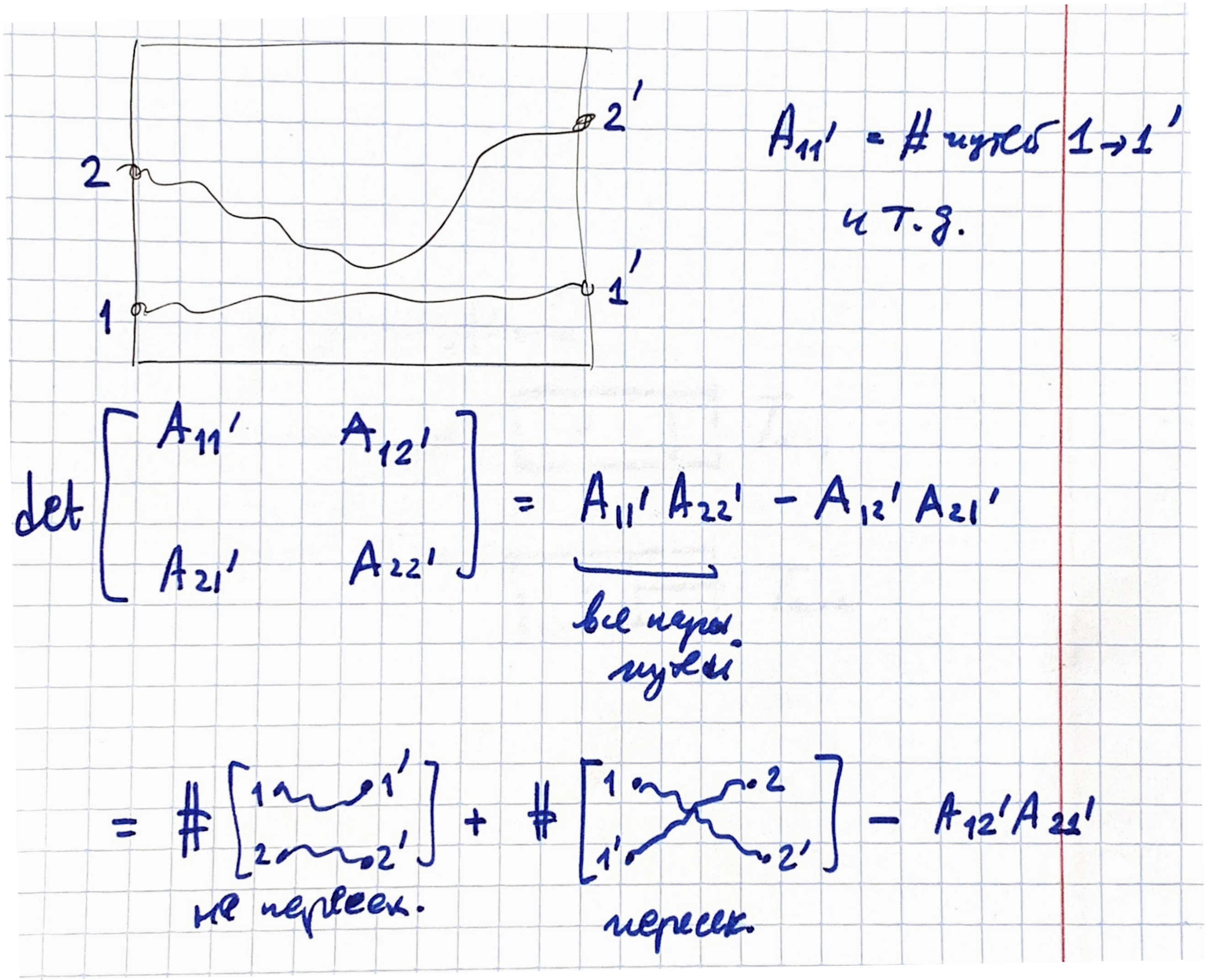


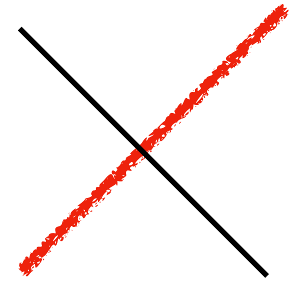
5. Сколько замощений $\Omega_{a,b,2}$?

Ответ: $\frac{1}{a+1}\binom{a+b}{a}\binom{a+b+1}{a}$

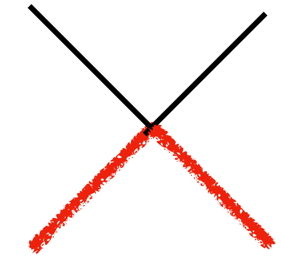
Мы видим, что число замощений многоугольника существенно зависит от “граничных условий” - малое изменение многоугольника может сильно изменить число его замощений.

Подсчет замощений $\Omega_{a,b,2}$





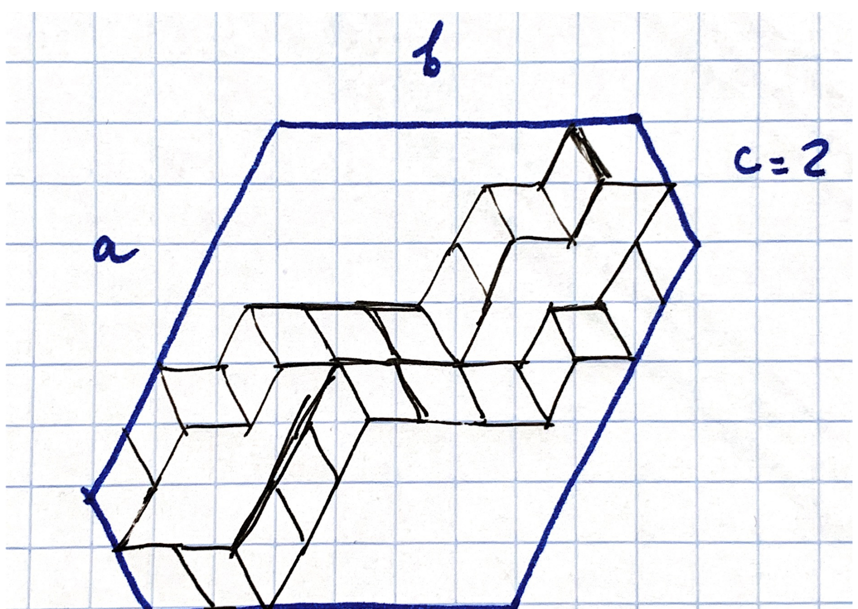
столько же, сколько



Лемма Гесселя-Вьенно

Число пар непересекающихся путей $(1 \to 1',\ 2 \to 2')$ равно

$$\det \begin{pmatrix} A_{11'} & A_{12'} \\ A_{21'} & A_{22'} \end{pmatrix}$$



$$\binom{a+b}{b}^2 - \binom{a+b}{a-1}\binom{a+b}{a+1} = \frac{1}{a+1}\binom{a+b}{a}\binom{a+b+1}{a}$$

Замечание. Лемма Гесселя-Вьенно верна и в общем случае (для n-ок непересекающихся путей), что дает опрелелитель $n \times n$ для числа замощений $\Omega_{a,b,n}$. Мы не будем его выписывать и считать, а вместо этого применим хитрую рекурсию

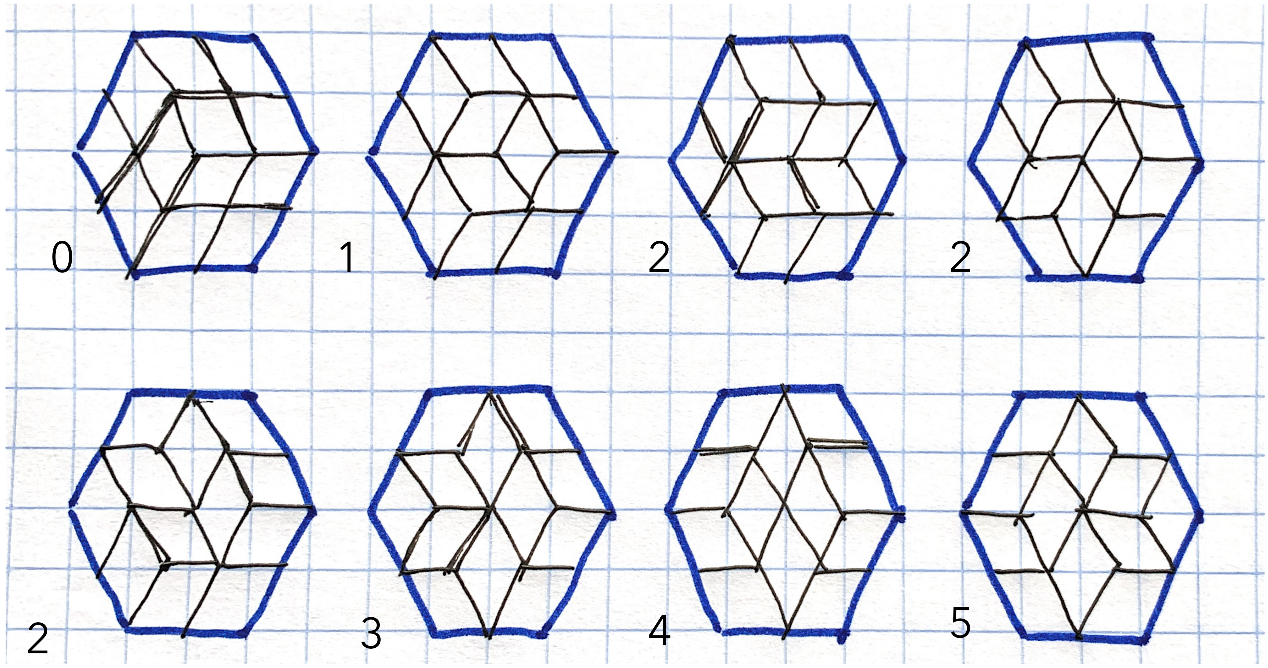
Формулы Макмагона

1. Число замощений $\Omega_{a,b,c}$ равно
$$\#\text{Tilings}(\Omega_{a,b,c}) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

2. Уточненный подсчет замощений, когда важен объем, ограниченный трехмерной поверхностью (здесь q - вещественный параметр):
$$\sum_{\pi\in\text{Tilings}(\Omega_{a,b,c})} q^{\mathrm{vol}(\pi)} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}}$$

Замечание. При $q\to 1$, вторая формула превращается в первую, так как $\frac{1-q^m}{1-q^n}\to\frac{m}{n}$.

Обе формулы были получены Перси МакМагоном ↗ в 1890-е годы.



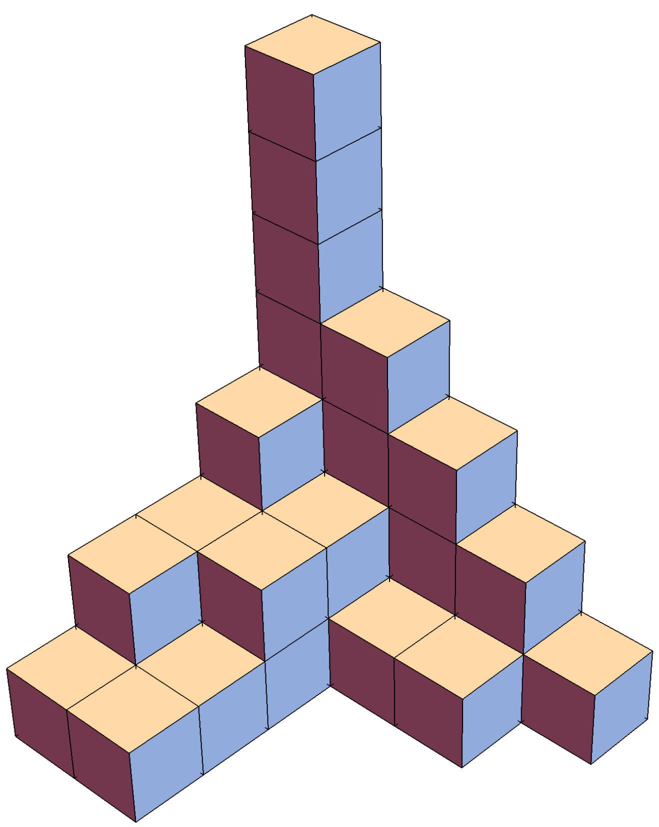
Пример $2\times2\times2$**.**

1. Число замощений равно 20, некоторые из них ⬆
2. q-производящая функция имеет вид
$$\frac{(1-q^4)^2(1-q^5)}{(1-q)(1-q^2)^2}$$
$$= 1+q+3q^2+3q^3+4q^4+3q^5+3q^6+q^7+q^8$$

6. Выпишите число замощений $\Omega_{a,b,3}$

ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ

Вторая формула МакМагона (с параметром q) выдерживает предел при $a, b, c \to \infty$. При этом коробка $a \times b \times c$ исчезает, и формула подсчитывает так называемые "плоские разбиения" (plane partitions).



В наших подсчетах договоримся, что $0 < q < 1$(иначе пределы не сойдутся).

8. Вычислите производящую функцию всех плоских разбиений $\sum_\pi q^{\mathrm{vol}(\pi)}$. Сколько всего плоских разбиений с 9 кубиками?

Чтобы перейти от второй формулы Макмагона к формуле для q-подсчета плоских разбиений, сначала запишем

$$\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{1-q^{i+j+k-1}}{1-q^{i+j+k-2}} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\frac{1-q^{i+j-1+c}}{1-q^{i+j-1}}.$$

Полагая $c = \infty$, можно считать, что знаменатель уходит (при желании строгость в этом утверждении легко восстановить). Параметр $i + j - 1$ принимает, при $a, b \to \infty$, все значения от одного до бесконечности. При этом значение h принимается (в двойном произведении по i, j) ровно h раз. Поэтому мы получаем формулу

$$\sum_{\pi\text{ - плоское разбиение}} q^{\mathrm{vol}(\pi)} = \prod_{h=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^h)^h}.$$

Начальная часть этого ряда (при q близком к нулю) имеет вид

$$1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 24q^5 + 48q^6 + 86q^7 + 160q^8$$
$$+282q^9 + 500q^{10} + 848q^{11} + 1456q^{12} + 2427q^{13} + \ldots$$

Например, есть 282 плоских разбиения с 9 кубиками, и т.д.

Материал, представленный в этой главе, в основном довольно классический. Формулы МакМагона можно найти во многих книгах по комбинаторике, а также на Википедии.

Картинки были нарисованы от руки, взяты из той же Википедии, либо сгенерированы в программе Mathematica. Исключение - трехмерная картинка замощения многоугольника в двух проекциях, которая взята из 3D модели А. Бородина.

Доказательство формулы МакМагона для шестиугольника, полученное развитием метода Гесселя-Вьенно (с помощью детерминантов) можно найти, например, в статье М. Берштейна и Г. Мерзона "Диаграммы Юнга, пути на решётке и метод отражений", или в брошюре Е. Смирнова "Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы".

Наше доказательство q-формулы МакМагона для шестиугольника (откуда пределом $q \to 1$ следует и сама формула для числа замощений шестиугольника) будет дано в следующей главе, и оно будет основано на симметрических многочленах Шура.

Больше про подсчет замещений доминошками (в том числе ацтекского бриллианта, о котором мы вообще ничего не сказали) можно узнать в:

- М. Вялый "Пфаффианы или искусство расставлять знаки…"
- Е. Смирнов "Три взгляда на ацтекский бриллиант"

Глава 2

Симметрические многочлены Шура и доказательство формул МакМагона

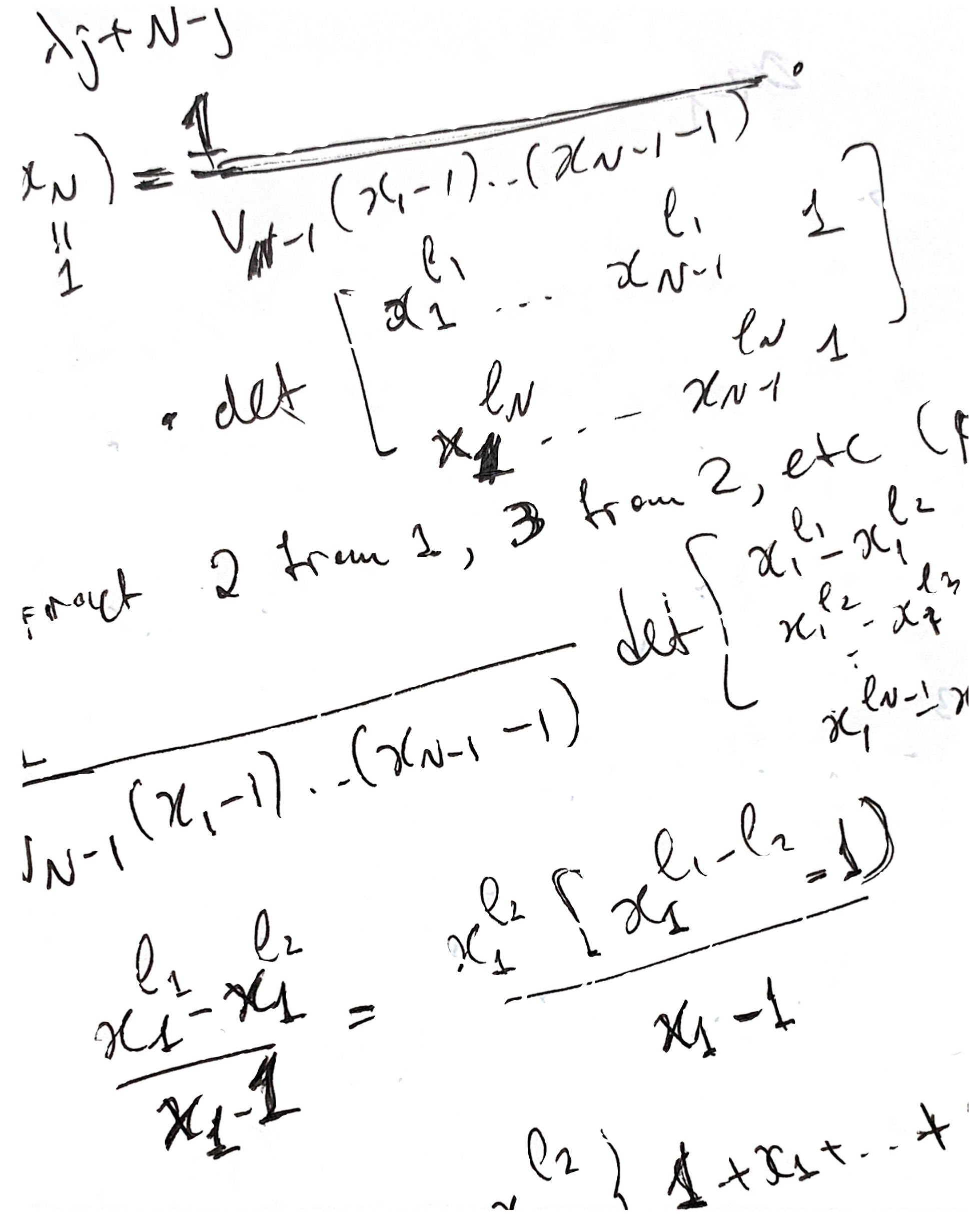
- Детерминанты - определение. Строчные и столбцовые операции
- Детерминант Вандермонда
- Многочлены Шура
- Правило ветвления многочленов Шура
- Правило ветвления и замощения ромбиками
- Косые многочлены Шура от одной переменной
- Подсчет числа замощений ромбиками
- Доказательство формул МакМагона

Зачем нам детерминанты и симметрические многочлены

Один из самых мощных методов исследования замощений - симметрические многочлены Шура. Они позволяют как подсчитать число замощений большого класса многоугольников, так и описать форму (и более тонкие асимптотики) больших случайных замощений.

Многочлены Шура определяются с помощью детерминантов, и нам придется ненадолго в них погрузиться. Это необходимо, чтобы дать формально полное доказательство формул МакМагона. В дальнейшем мы не будем использовать много детерминантов, а сосредоточимся на приложениях обычных и косых функций Шура.

Мы начнем с напоминания про детерминанты, затем обсудим классическое утверждение про детерминант Вандермонда, в качестве разогрева.



Напоминание о детерминантах

Детерминант (определитель) квадратной матрицы $n \times n$ - это знакопеременная сумма $n!$ произведений элементов, по одному из строки и из столбца:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn}\sigma \, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} .$$

Это формальное определение может быть не очень интуитивно понятным, давайте посмотрим на примеры:

- $n = 1, \det [a] = a;$
- $n = 2, \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc;$
- $n = 3$, детерминант содержит 6 слагаемых

Отметим ключевые свойства детерминантов, которые нам понадобятся:

- Если две строки или два столбца одинаковы, то детерминант равен нулю. Более общо, если строки или столбцы линейно зависимы, то детерминант равен нулю.
- Если переставить местами две строки или два столбца, то детерминант поменяет знак.
- Если в строке или столбце матрицы все нули, кроме одного элемента, то порядок детерминанта можно уменьшить: $\det \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = A \cdot \det \begin{bmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{bmatrix}$
- Самое важное, строчные/столбцовые операции. Если в детерминанте взять строку и прибавить к ней другую строку, умноженную на любое число, то детерминант не поменяется. То же самое, если оперировать со столбцами.

ВАНДЕРМОНД

Многие детерминанты считаются явно и носят имена собственные. Один из них - *детерминант Вандермонда*

$$V_N(x_1,\ldots,x_N)=\det[x_i^{N-j}]_{i,j=1}^N=\det\begin{bmatrix} x_1^{N-1} & \ldots & x_1^2 & x_1 & 1\\ x_2^{N-1} & \ldots & x_2^2 & x_2 & 1\\ \ldots & & & & \\ x_N^{N-1} & \ldots & x_N^2 & x_N & 1\end{bmatrix}.$$

Теорема. Детерминант Вандермонда равен

$$V_N(x_1,\ldots,x_N)=\prod_{1\le i<j\le N}(x_i-x_j).$$

Доказательство. Проводится по индукции. База для $N=1,\ N=2$ очевидна. Возьмем детерминант порядка N и сделаем две вещи:

- Сначала вычтем первую строчку из каждой, от этого детерминант не изменится. При этом в первой строчке получатся все элементы кроме одного - нули, поэтому порядок детерминанта уменьшится на 1.
- Затем вычтем из каждого столбца $j, j=1,\ldots,N-2$, этой новой матрицы порядка $N-1$, столбец $j+1$, помноженный на x_1.
- После этого множители x_i-x_1 выносятся.

При таких преобразованиях с матрицей происходит вот что (пусть $N=4$ для простоты):

$$\det\begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1\\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1\\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1\\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1\\ x_2^3-x_1^3 & x_2^2-x_1^2 & x_2-x_1 & 0\\ x_3^3-x_1^3 & x_3^2-x_1^2 & x_3-x_1 & 0\\ x_4^3-x_1^3 & x_4^2-x_1^2 & x_4-x_1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} x_2^3-x_1^3 & x_2^2-x_1^2 & x_2-x_1\\ x_3^3-x_1^3 & x_3^2-x_1^2 & x_3-x_1\\ x_4^3-x_1^3 & x_4^2-x_1^2 & x_4-x_1\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} (x_2-x_1)x_2^2 & (x_2-x_1)x_2 & x_2-x_1\\ (x_3-x_1)x_3^2 & (x_3-x_1)x_3 & x_3-x_1\\ (x_4-x_1)x_4^2 & (x_4-x_1)x_4 & x_4-x_1\end{bmatrix}.$$

Здесь уже можно вынести все множители, получить V_{N-1}, и действовать по индукции. ∎

1. Докажите, что эти действия - последовательность столбовых операций (и не меняют дет.)

Многочлены Шура

Дадим определение многочлена Шура. Эти многочлены зависят от нескольких переменных $x_1, \ldots, x_N$ и индексируются последовательностями различных неотрицательных чисел $\overrightarrow{\ell} = \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_N$:

$$s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{\det[x_i^{\ell_j}]_{i,j=1}^N}{V_N(x_1, \ldots, x_N)}$$

Задача - получить *комбинаторную* формулу для $s_{\overrightarrow{\ell}}$.

Маленькие примеры:

- $N = 1,\ \overrightarrow{\ell} = (n),\ s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1) = x_1^n$
- $N = 2,\ \overrightarrow{\ell} = (m > n),\ s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, x_2) = \dfrac{x_1^m x_2^n - x_2^m x_1^n}{x_1 - x_2}$
  $= (x_1x_2)^n \dfrac{x_1^{m-n} - x_2^{m-n}}{x_1 - x_2} = (x_1x^2)^n\left(x_1^{m-n-1} + x_1^{m-n-2}x_2 + \ldots + x_1x_2^{m-n-2} + x_2^{m-n-1}\right)$
  $= x_1^{m-1}x_2^n + x_1^{m-2}x_2^{n+1} + \ldots + x_1^n x_2^{m-1}$.
  Здесь мы поделили с помощью формулы разности степеней.

2. Докажите, что многочлен Шура $s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)$ - действительно многочлен от $x_1, \ldots, x_N$.

Оказывается, отношение детерминантов всегда будет однородным многочленом от $x_1, \ldots, x_N$. Он и называется многочленом Шура.

3. Какова (суммарная) степень многочлена Шура? Ответ $\sum \ell_i - C_N^2$

4. Докажите, что многочлен Шура симметричен по $x_1, \ldots, x_N$

Утверждение (без доказательства).

Многочлены Шура $s_{\overrightarrow{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)$ (когда $\overrightarrow{\ell}$ пробегает все возможные последовательности $\ell_1 > \ldots > \ell_N$) образуют базис в пространстве всех симметрических многочленов от N переменных.

Про обозначения

Многочлены Шура названы в честь Исаи Шура (Schur), математика очень сложной судьбы ([Википедия](#)) ➡️
(При этом сами многочлены были известны уже в начале XIX века.)

Для приложения к замощениям нам удобно *нетрадиционное* обозначение для меток $\overrightarrow{\ell}$ многочленов Шура $s_{\overrightarrow{\ell}}$. А именно, если определить $\lambda_i = \ell_i + i - N,\ i = 1,\ldots,N$, то эти метки нестрого упорядочены: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N \geq 0$. Мы получаем *разбиение* λ.

Всюду в литературе многочлены Шура обозначаются $s_\lambda(x_1,\ldots,x_N)$. Степень s_λ равна $|\lambda|$.

В теории представлений многочлены Шура выступают, например, как характеры представлений унитарных групп, при этом $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_N)$ - старший вес представления.

Отношение перемежания

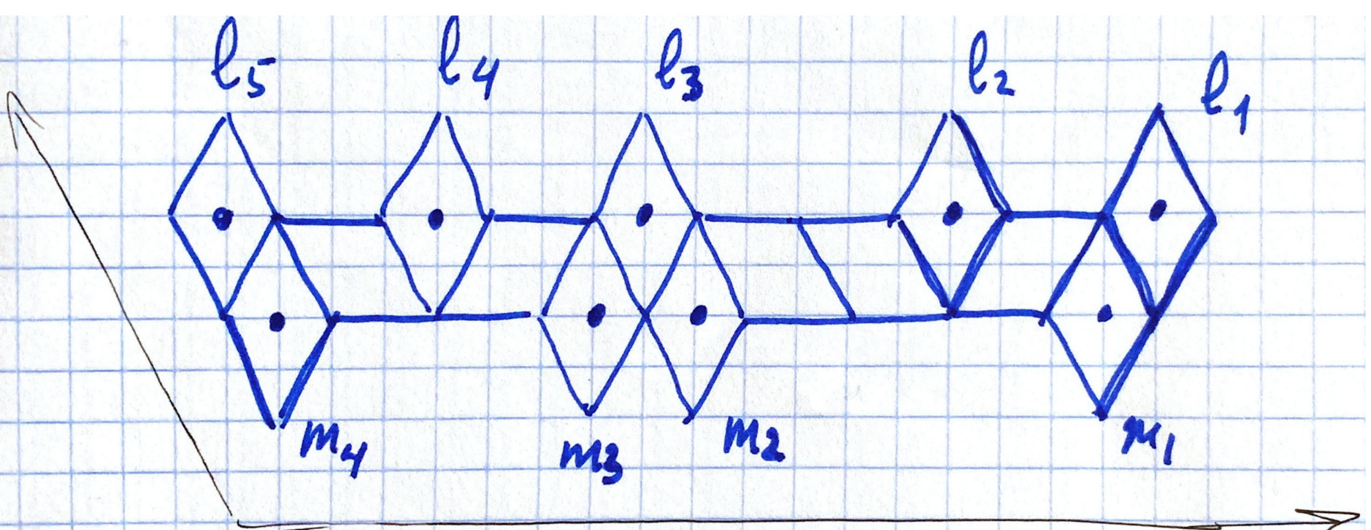
Определение. Пусть $\vec{\ell} = (\ell_1 > \ldots > \ell_N)$ и $\vec{m} = (m_1 > \ldots > m_{N-1})$ - две последовательности. Они называются *перемежающимися* (англ. *interlacing*), если

$$\vec{m} \dot{\prec} \vec{\ell} \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell_N \le m_{N-1} < \ell_{N-1} \le m_{N-2} < \ldots \ell_2 \le m_1 < \ell_1$$

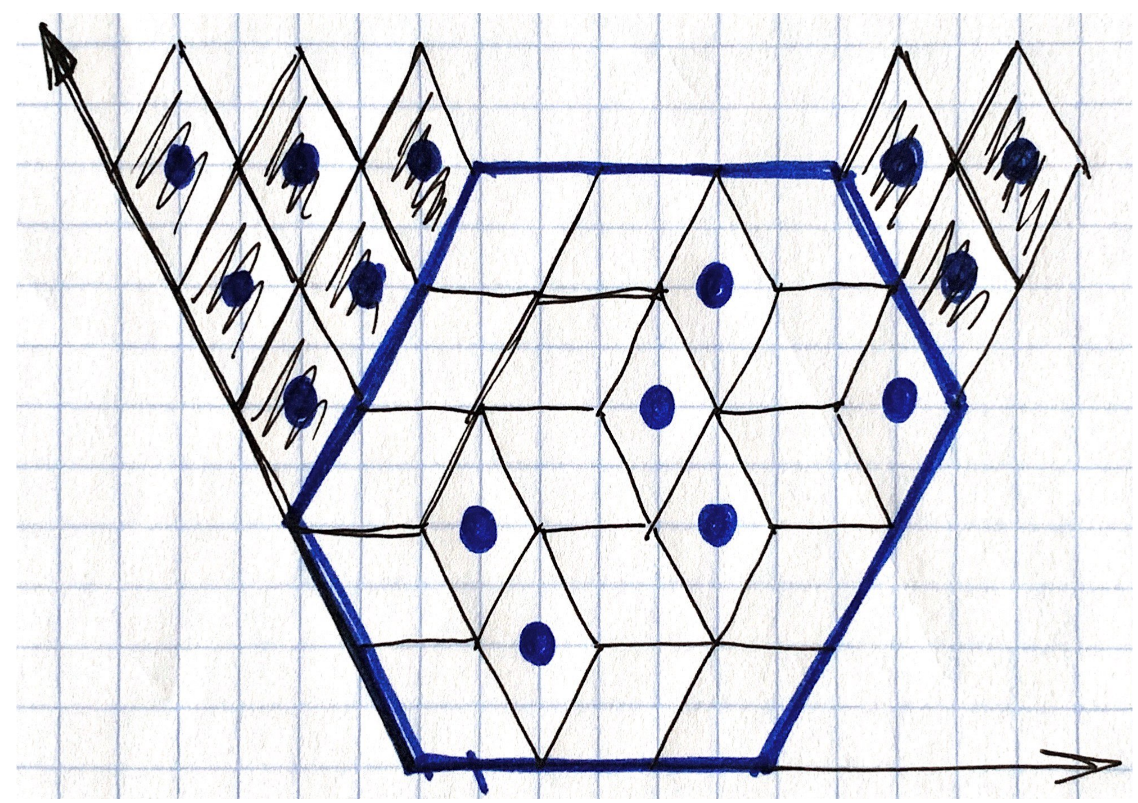
Type to enter text

Это определение немного несимметрично относительно $\vec{\ell}$ и $\vec{m}$. Но это оказывается удобным, т.к. соответствует перемежанию двух соседних слоев в замощении ромбиками!

Здесь ℓ_i, m_i - горизонтальные координаты центров ромбиков в косой системе координат. Легко видеть, что это приводит к неравенствам $m_i < \ell_i \le m_{i-1}$.



Координатизация замощений. Каждое замощение шестиугольника путем добавления вертикальных (закрашенных) ромбиков можно отождествить с перемежающимся массивом целых чисел (каждые два слоя в этом массиве связаны отношением $\dot{\prec}$):



массив

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 6 & & 7 \\
 & 0 & & 1 & & 4 & & 6 & \\
 & & 0 & & 3 & & 5 & & \\
 & & & 1 & & 3 & & & \\
 & & & & 1 & & & &
\end{array}$$

ВЕТВЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ШУРА

Теорема (правило ветвления многочленов Шура).

$$s_{\vec{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)\Big|_{x_N=1} = \sum_{\vec{m}:\ \vec{m} \dot{<} \vec{\ell}} s_{\vec{m}}(x_1, \ldots, x_{N-1})$$

Замечание. В теории представлений это соответствует ограничению неприводимого представления $U(N)$ на подгруппу $U(N-1) \subset U(N)$, и разложению этого ограничения на неприводимые представления подгруппы. (Задача осмыслена и интересна для любой цепочки вложенных групп/алгебр.)

Доказательство. По индукции, используя определение многочлена Шура с помощью детерминанта. Проведем доказательство для простоты при $N = 4$. Шаги такие: вычитаем из первой строки вторую, из второй третью, и т.д. Получится детерминант, у которого в последнем столбце есть единственная единица, так что можно уменьшить порядок. Далее, первый столбец будет делиться на $x_1 - 1$, второй на $x_2 - 1$, третий на $x_3 - 1$ - и таким образом Вандермонд тоже уменьшит порядок.

$$\frac{1}{V_4(x_1, x_2, x_3, 1)} \det \begin{bmatrix} x_1^{\ell_1} & x_2^{\ell_1} & x_3^{\ell_1} & 1 \\ x_1^{\ell_2} & x_2^{\ell_2} & x_3^{\ell_2} & 1 \\ x_1^{\ell_3} & x_2^{\ell_3} & x_3^{\ell_3} & 1 \\ x_1^{\ell_4} & x_2^{\ell_4} & x_3^{\ell_4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{V_3(x_1, x_2, x_3)(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)} \det \begin{bmatrix} x_1^{\ell_1} - x_1^{\ell_2} & x_2^{\ell_1} - x_2^{\ell_2} & x_3^{\ell_1} - x_3^{\ell_2} \\ x_1^{\ell_2} - x_1^{\ell_3} & x_2^{\ell_2} - x_2^{\ell_3} & x_3^{\ell_2} - x_3^{\ell_3} \\ x_1^{\ell_3} - x_1^{\ell_4} & x_2^{\ell_3} - x_2^{\ell_4} & x_3^{\ell_3} - x_3^{\ell_4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{V_3(x_1, x_2, x_3)} \det \begin{bmatrix} \sum_{\ell_2 \le m_1 < \ell_1} x_1^{m_1} & \sum_{\ell_2 \le m_1 < \ell_1} x_2^{m_1} & \sum_{\ell_2 \le m_1 < \ell_1} x_3^{m_1} \\ \sum_{\ell_3 \le m_2 < \ell_2} x_1^{m_2} & \sum_{\ell_3 \le m_2 < \ell_2} x_2^{m_2} & \sum_{\ell_3 \le m_2 < \ell_2} x_3^{m_2} \\ \sum_{\ell_4 \le m_3 < \ell_3} x_1^{m_3} & \sum_{\ell_4 \le m_3 < \ell_3} x_2^{m_3} & \sum_{\ell_4 \le m_3 < \ell_3} x_3^{m_3} \end{bmatrix}$$

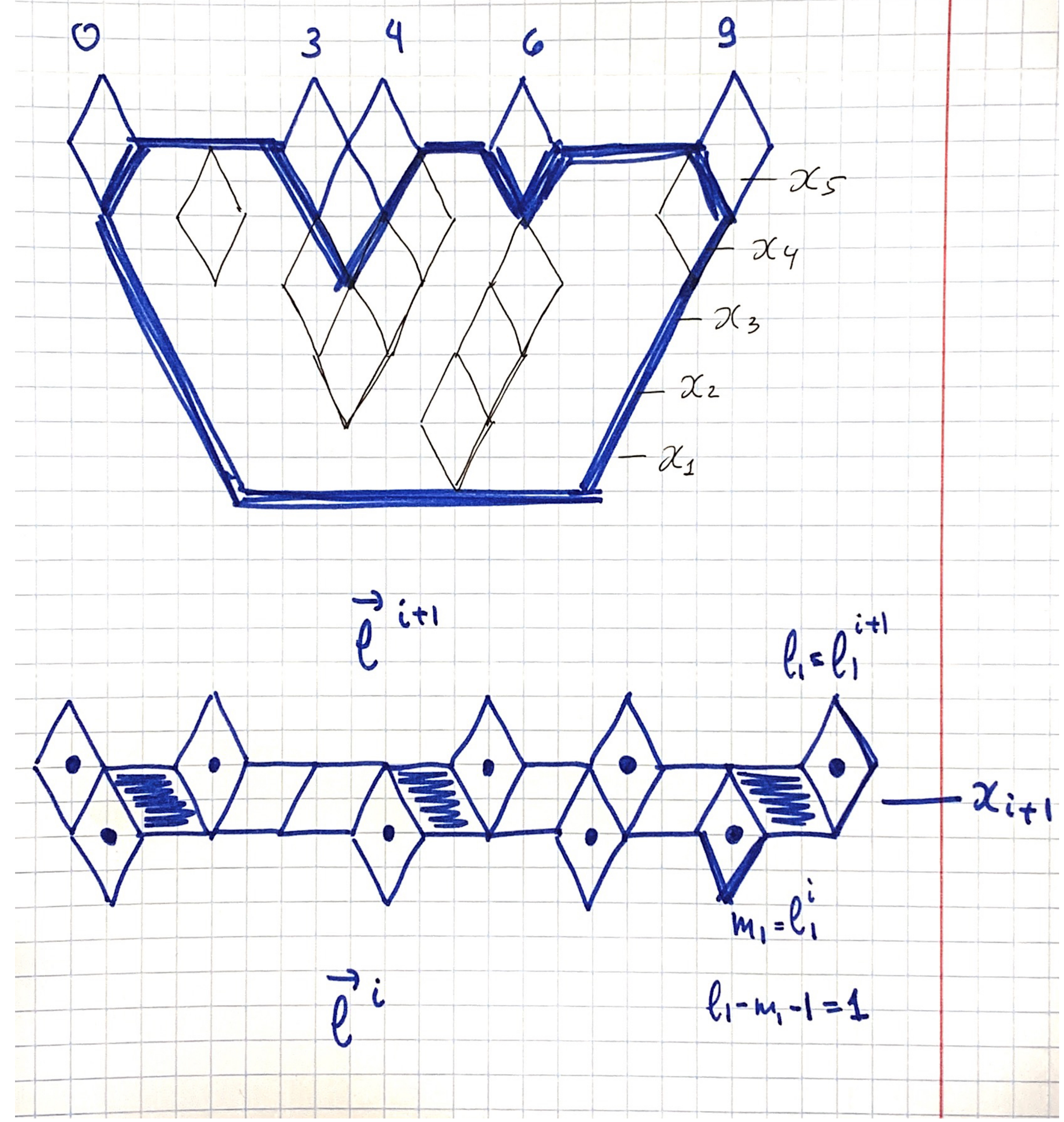
Так как детерминант - мультилинейная функция, и суммы по m_1, m_2, m_3 в каждой строке одинаковые, то получается как раз сумма $s_{\vec{m}}$ по всем $\vec{m} \dot{<} \vec{\ell}$. ∎

Следствие.

$$s_{\vec{\ell}}(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{\vec{m}:\ \vec{m} \dot{<} \vec{\ell}} s_{\vec{m}}(x_1, \ldots, x_{N-1})\ x_N^{\sum \ell_i - \sum m_j - (N-1)}.$$

(Потому что мн. Шура однородны, и мы знаем степени.)

Многочлены Шура и перечисление замощений



Обозначим $|\vec{\ell}| = \sum \ell_i$.

Применяя следствие для $N-1, N-2, \ldots, 2$, получаем, что

$$s_{\vec{\ell}}(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{\vec{\ell}^1 \prec \vec{\ell}^2 \prec \ldots \prec \vec{\ell}^N = \vec{\ell}} x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2| - |\vec{\ell}^1| - 1} \ldots x_N^{|\vec{\ell}^N| - |\vec{\ell}^{N-1}| - (N-1)}$$

Сумма здесь ведется по всем перемежающимся массивам или, что то же самое, по всем замощениям π высоты N с верхней строчкой $\vec{\ell}$. Причем функция от π, которую мы суммируем, зависит от N параметров $x_1, \ldots, x_N$ и является произведением некоторых выражений ➡️ по всем слоям.
А именно, $|\vec{\ell}^{\,i+1}| - |\vec{\ell}^{\,i}| - i$ - это число закрашенных горизонтальных ромбиков плюс крайнее значение сверху, равное ℓ_{i+1}^{i+1}. Это **косой многочлен Шура** (от одной переменной): $s_{\vec{\ell}^{\,i+1}/\vec{\ell}^{\,i}}(x_{i+1}) = x_{i+1}^{|\vec{\ell}^{\,i+1}| - |\vec{\ell}^{\,i}| - i}$ (и по определению многочлен равен нулю, если перемежаемость не выполняется).

Число замощений с верхней строкой $\vec{\ell}$, таким образом, равно $s_{\vec{\ell}}(1,1,\ldots,1)$. Но это сразу из детерминантной формулы не посчитаешь…

q-перечисление замощений

Пусть пока верхняя строчка $\vec{\ell}$ на уровне N-произвольная. Подставим в многочлен Шура геометрическую прогрессию, $s_{\vec{\ell}}(1,q^{-1},\dots,q^{1-N})$. Тогда в сумме по замещениям получим q в степени

$$-|\vec{\ell}^{\,2}|+|\vec{\ell}^{\,1}|+1-2|\vec{\ell}^{\,3}|+2|\vec{\ell}^{\,2}|+4-3|\vec{\ell}^{\,4}|+3|\vec{\ell}^{\,3}|+9+\dots$$
$$=\mathrm{const}(\vec{\ell},N)+\sum_{j=1}^{N}|\vec{\ell}^{\,j}|.$$

5. Докажите, что $\sum|\vec{\ell}^{\,j}|$ -это объем замощения с точностью до аддитивной константы

Таким образом, $s_{\vec{\ell}}(1,q^{-1},\dots,q^{1-N})=q^{\mathrm{const}(\vec{\ell},N)}\sum_{\pi}q^{\mathrm{vol}(\pi)}$.

С помощью детерминантной формулы для многочлена Шура мы можем вычислить левую часть. А именно, из-за геометрической прогрессии мы увидим Вандермонд и в числителе тоже!

$$s_{\vec{\ell}}(1,q^{-1},\dots,q^{1-N})=\frac{\det[q^{(1-i)\ell_j}]_{i,j=1}^{N}}{\prod_{i<j}(q^{1-i}-q^{1-j})}=\frac{\det[(q^{-\ell_j})^{i-1}]_{i,j=1}^{N}}{\prod_{i<j}(q^{1-i}-q^{1-j})}$$
$$=\prod_{i<j}\frac{q^{-\ell_i}-q^{-\ell_j}}{q^{1-j}-q^{1-i}}=\prod_{i<j}\frac{q^{N-\ell_i}-q^{N-\ell_j}}{q^{N+1-j}-q^{N+1-i}}=\prod_{i<j}\frac{q^{N-\ell_i}-q^{N-\ell_j}}{q^{i}-q^{j}}$$

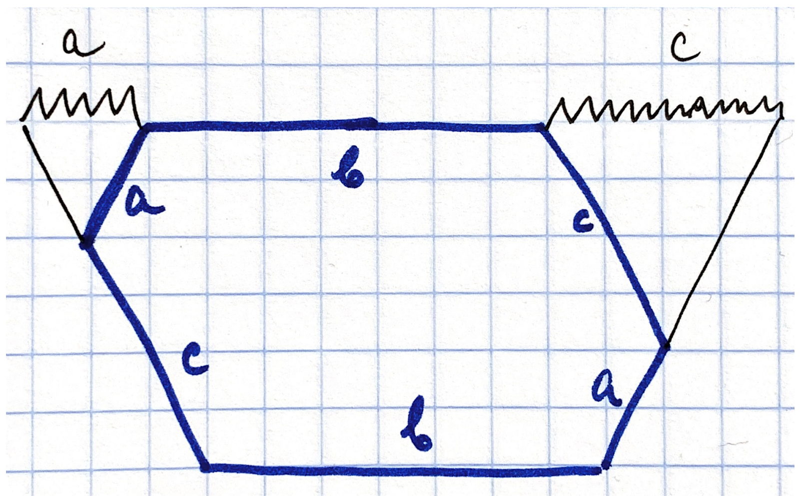
(здесь числитель и знаменатель положительны).

В этой формуле мы уже можем устремить q к единице ($q^{\mathrm{const}(\vec{\ell},N)}$ роли не играет), и получим

$$s_{\vec{\ell}}(1,1,\dots,1)=\prod_{i<j}\frac{\ell_i-\ell_j}{j-i}.$$

Это на самом деле **формула размерности Вейля**, которая (в данном частном случае типа A, унитарных групп) дает размерность неприводимого представления.

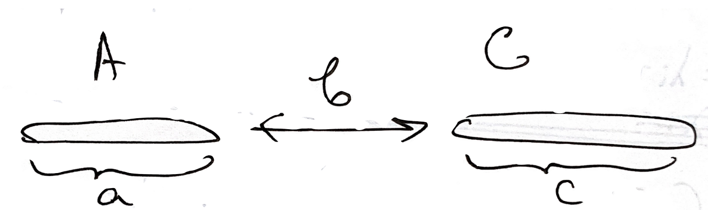
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ МАКМАГОНА



Теперь мы можем применить все к шестиугольнику. Если он вот такой ⬆️, то надо взять $N = a + c$, и

$\vec{\ell} = (a+b+c-1, a+b+c-2, \ldots, a+b, a-1, \ldots, 1, 0)$.

Получим формулу МакМагона из формулы размерности, q-случай оставим в качестве упражнения.



$$\prod_{i<j} = \Big(\prod_{\substack{i<j\\ i,j\in A}}\Big)\Big(\prod_{\substack{i<j\\ i,j\in C}}\Big)\Big(\prod_{\substack{i\in A\\ j\in C}}\Big)$$

Для шестиугольника произведение $\displaystyle\prod_{1\le i<j\le a+c}\frac{\ell_i-\ell_j}{j-i}$ разбивается в три. В первой и третьей части оба индекса i, j принадлежат одной и той же плотной упаковке; во второй - разным. Оказывается, что первая и третья часть сокращаются. Получается, что произведение дает

$$\prod_{1\le i<j\le a+c}\frac{\ell_i-\ell_j}{j-i} = \prod_{i=1}^{c}\prod_{j=1}^{a}\frac{a+b+c-i-(a-j)}{(c+j)-i} \qquad \blacksquare$$

8. Убедитесь, что это выражение совпадает с формулой МакМагона для числа замощений $\Omega_{a,b,c}$

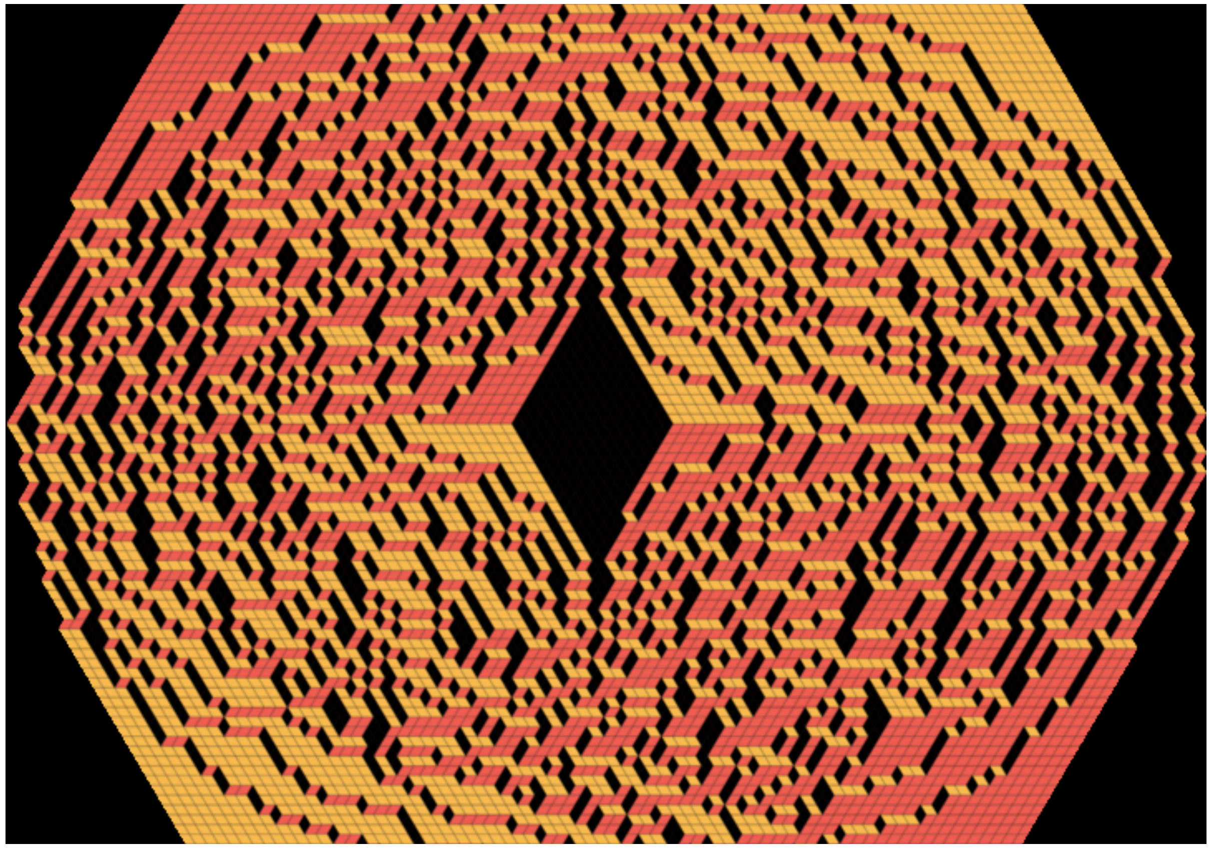
9. Выведите q-формулу МагМагона из формулы для $s_{\vec{\ell}}(1, q^{-1}, \ldots, q^{1-N})$

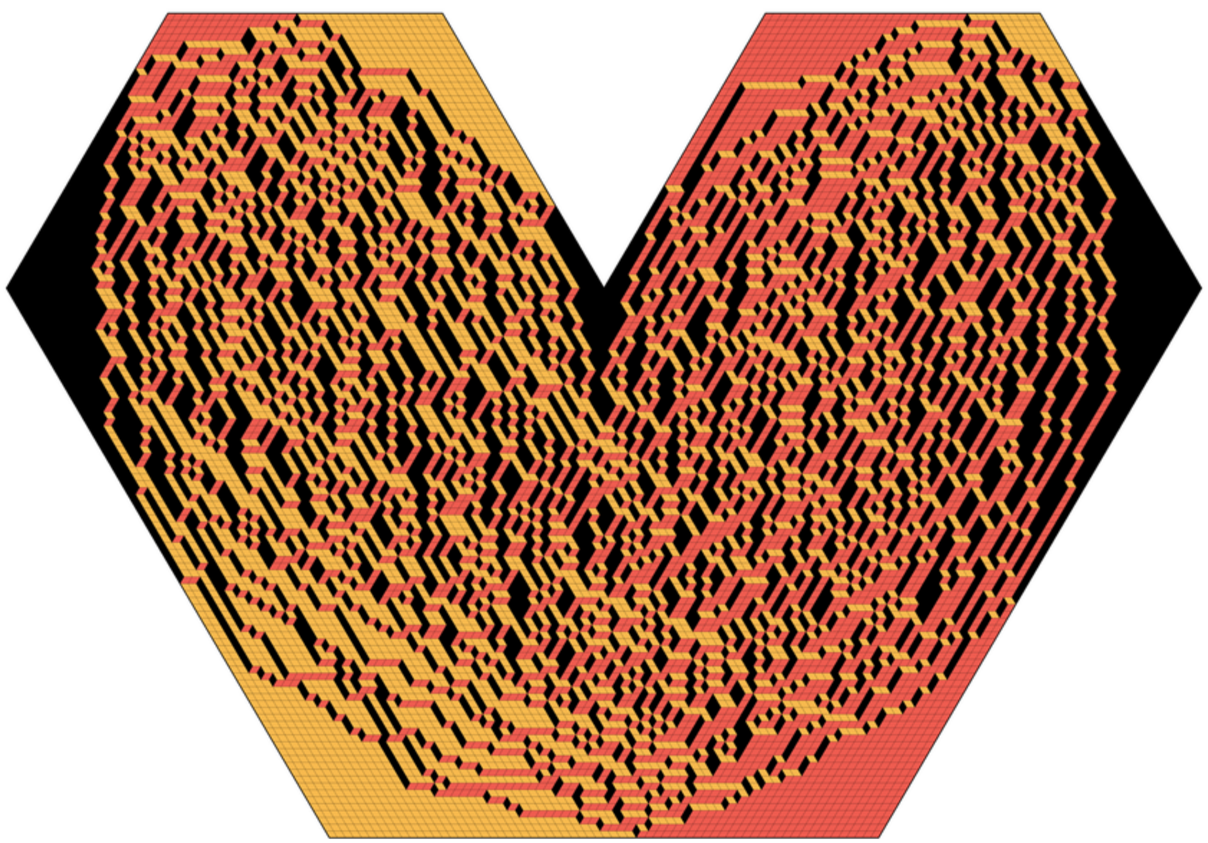
Глава 3

Асимптотика

Случайные перестройки как марковские операции

- Модели случайных замощений
- Обзор: как выглядят случайные замощения больших многоугольников
- Как рисовать картинки?
- Вероятностное пространство
- Марковские операторы
- Сходимость марковской цепи к стационарному распределению
- Элементарные примеры
- Обратимость, уравнение детального баланса
- Приложение к замощениям
- Глауберова динамика в равномерном случае
- Глауберова динамика в параметрическом случае





Случайные замощения

Мы будем рассматривать две вероятностные ситуации: **равномерную** и **параметрическую**. Зафиксируем пилообразный многоугольник (например, шестиугольник), и рассмотрим все его замощения.

В **равномерной** модели $\mathbb{M}_1$, разыграем случайное замощение равновероятно среди всех: $\mathbb{M}_1(\pi) = \dfrac{1}{Z}$, где Z - статсумма, нормировочная константа. Мы ее считали:

- для шестиугольника, она дается формулой МакМагона
- Для пилообразной области с верхней строчкой $\overrightarrow{\ell} = (\ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_N)$ она равна $s_{\overrightarrow{\ell}}(1,1,\ldots,1)$, что явно выражается формулой размерности Вейля.

Случайные замощения

Параметрическая модель зависит от положительных $x_1, \dots, x_N$ (N - высота многоугольника), и определяется

$$\mathbb{M}_{\vec{x}}(\pi) = \frac{\text{вклад замощения в многочлен Шура}}{s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N)}.$$

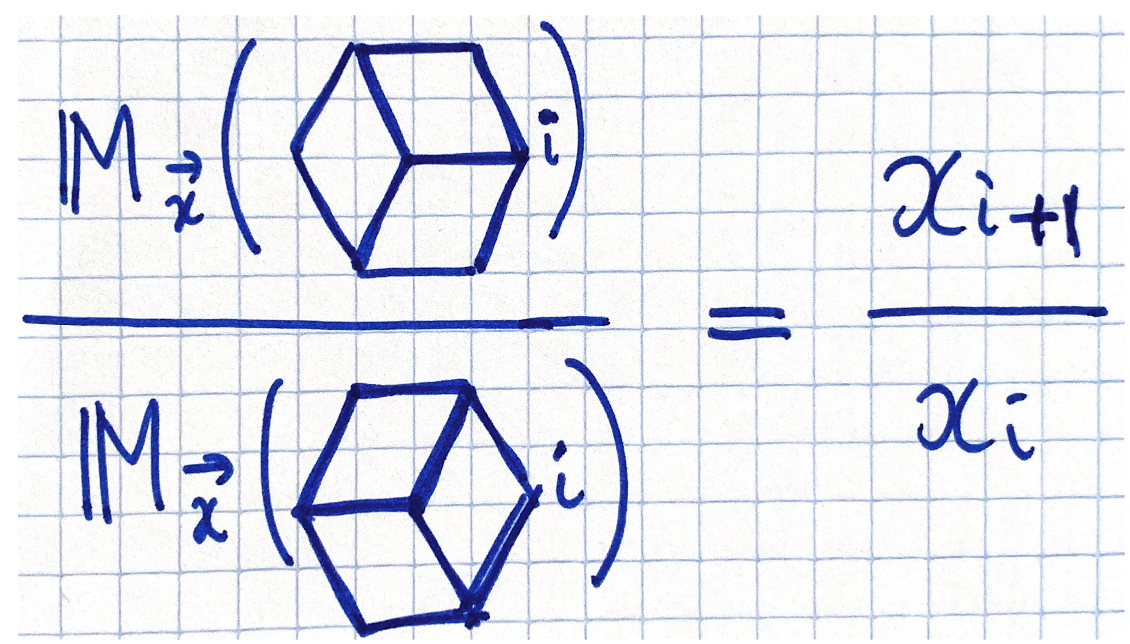
Здесь "вклад" - это моном $x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2|-|\vec{\ell}^1|-1} \dots x_N^{|\vec{\ell}^N|-|\vec{\ell}^{N-1}|-(N-1)}$. Соответственно, статумма - это просто многочлен Шура с переменными $x_1, \dots, x_N$.

1. Параметрическая модель не зависит от одновременной перенормировки переменных x_i, однако зависит от их перестановки

Частные случаи параметрической модели - меры $\propto q^{\pm \mathrm{vol}(\pi)}$, то есть, где вес замощения пропорционален q в степени плюс или минус объем. В наших обозначениях получаем

- $q^{+\mathrm{vol}(\pi)}$: $x_i = q^{1-i}$, обозначение $\mathbb{M}_q$
- $q^{-\mathrm{vol}(\pi)}$: $x_i = q^{i-1}$, обозначение $\mathbb{M}_{1/q}$

Проще всего это понять, если не смотреть на вес всего замощения, а только на то, как параметрический вес $\mathbb{M}_{\vec{x}}$ меняется при элементарных перестройках:



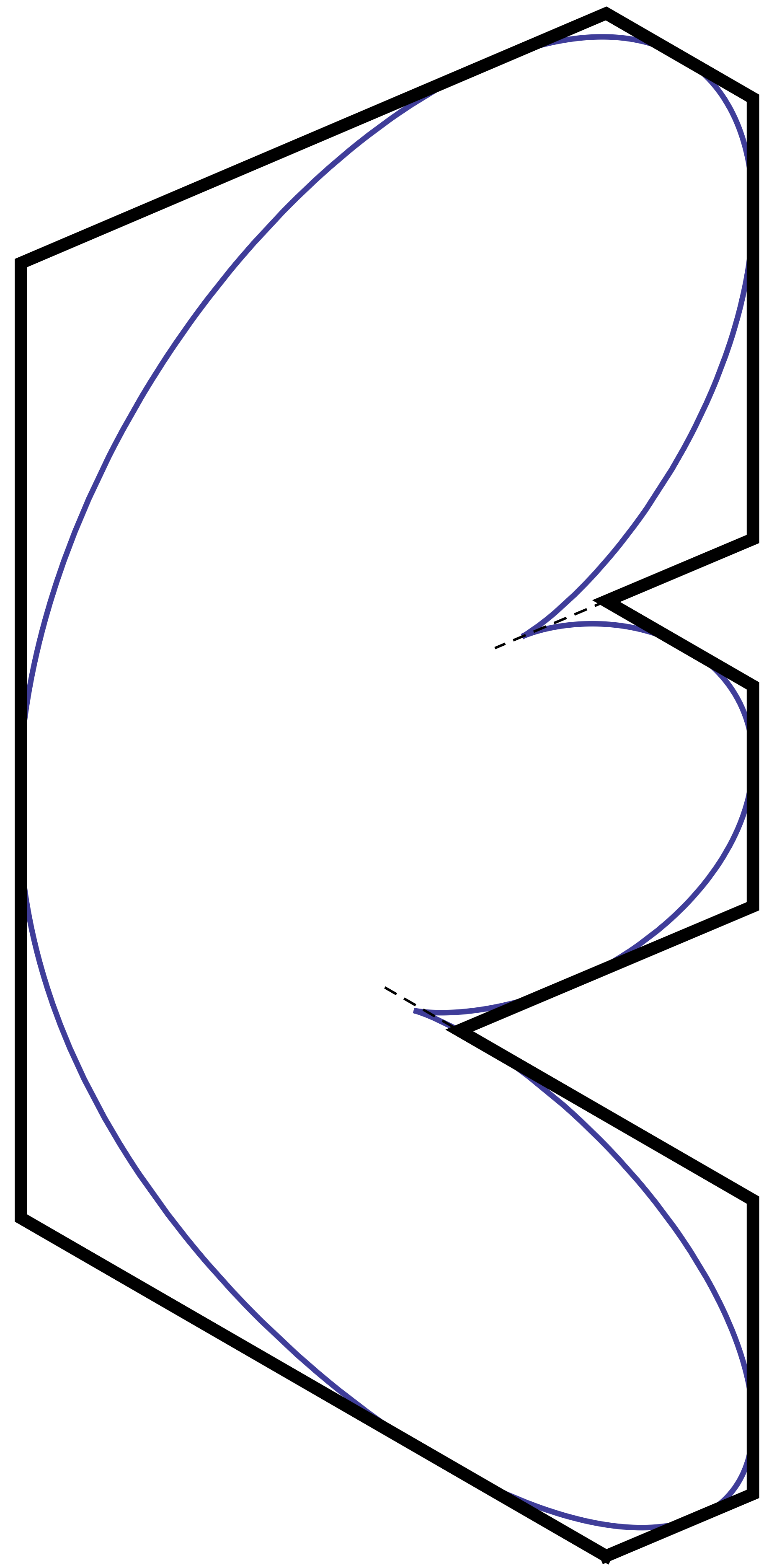
То есть, при увеличении объема вероятностный вес умножается на x_i / x_{i+1}. Именно поэтому в геометрических прогрессиях получается так, как выше.

ОБЗОР АСИМПТОТИКИ

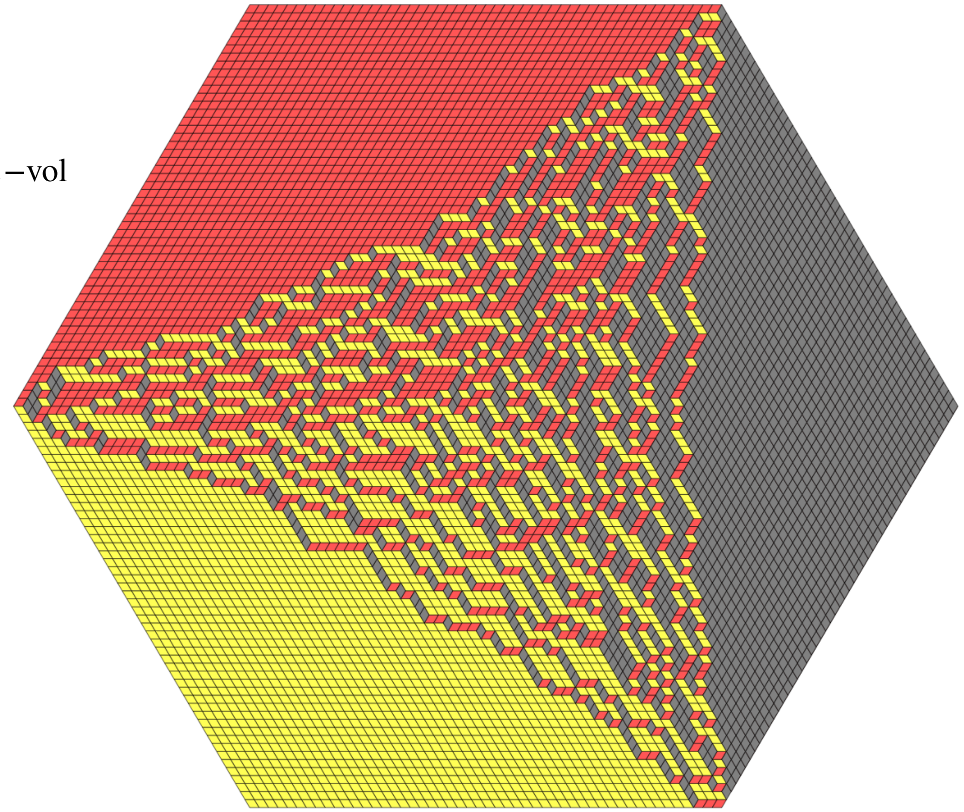
Асимптотика равномерной модели хорошо изучена, а параметрической - в основном только в q-случае, да и там сделано сильно меньше. В равномерной модели $\mathbb{M}_1$:

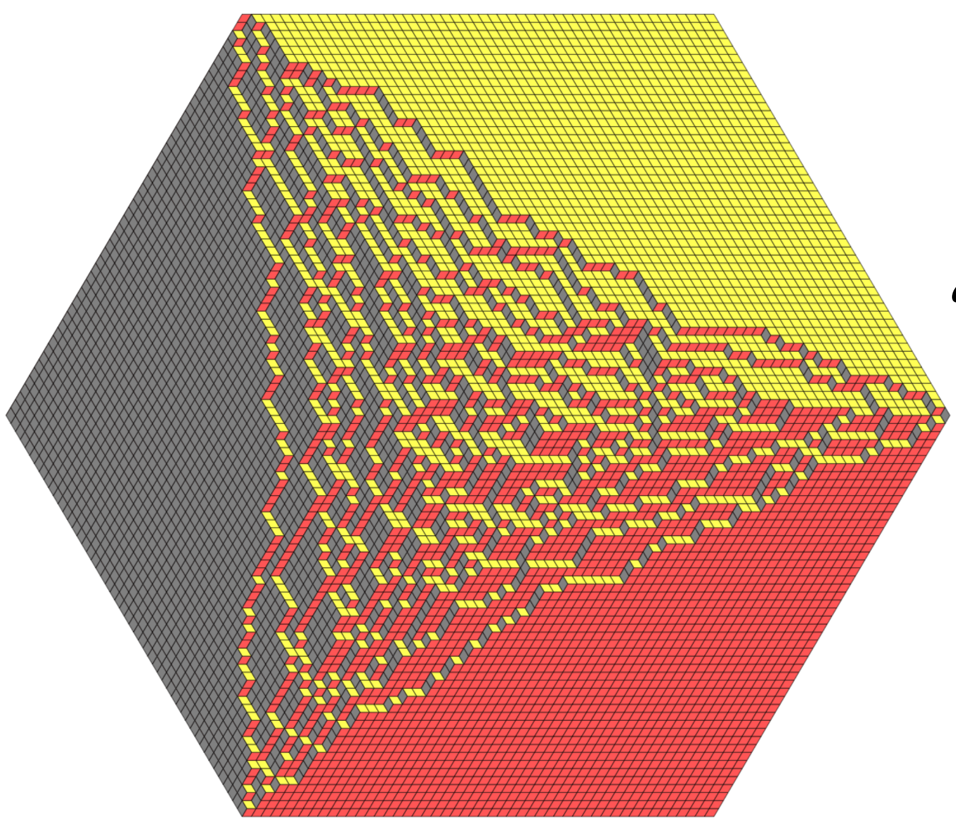
- Замороженная граница - алгебраическая кривая минимальной степени, касающаяся всех сторон или продолжений
- Предельная форма трехмерной картинки имеет алгебраическую нормаль
- Глобальные флуктуаций вокруг предельной формы - гауссово свободное поле (один из конформных объектов из лекции С.К. Смирнова)
- В решеточном пределе в “гуще” - экстремальная мера на замощениях (постоянной плотности) всей плоскости
- На границе вокруг замороженной границы - кривые Эйри
- Еще бывают замещения с дырками…

В этой науке еще очень много недоказанных гипотез, и почти ничего не известно для общей параметрической модели $\mathbb{M}_{\vec{x}}$.



$q^{-\mathrm{vol}}$





$q^{+\mathrm{vol}}$

В случае шестиугольника с равномерной мерой, замороженная граница - это просто вписанный эллипс.

В случае шестиугольника с мерой $q^{\pm\mathrm{vol}}$ эллипс деформируется (или, что то же самое, записывается в новых экспоненциальных координатах), и получаются фигуры типа таких ⬅️

Как рисовать картинки?

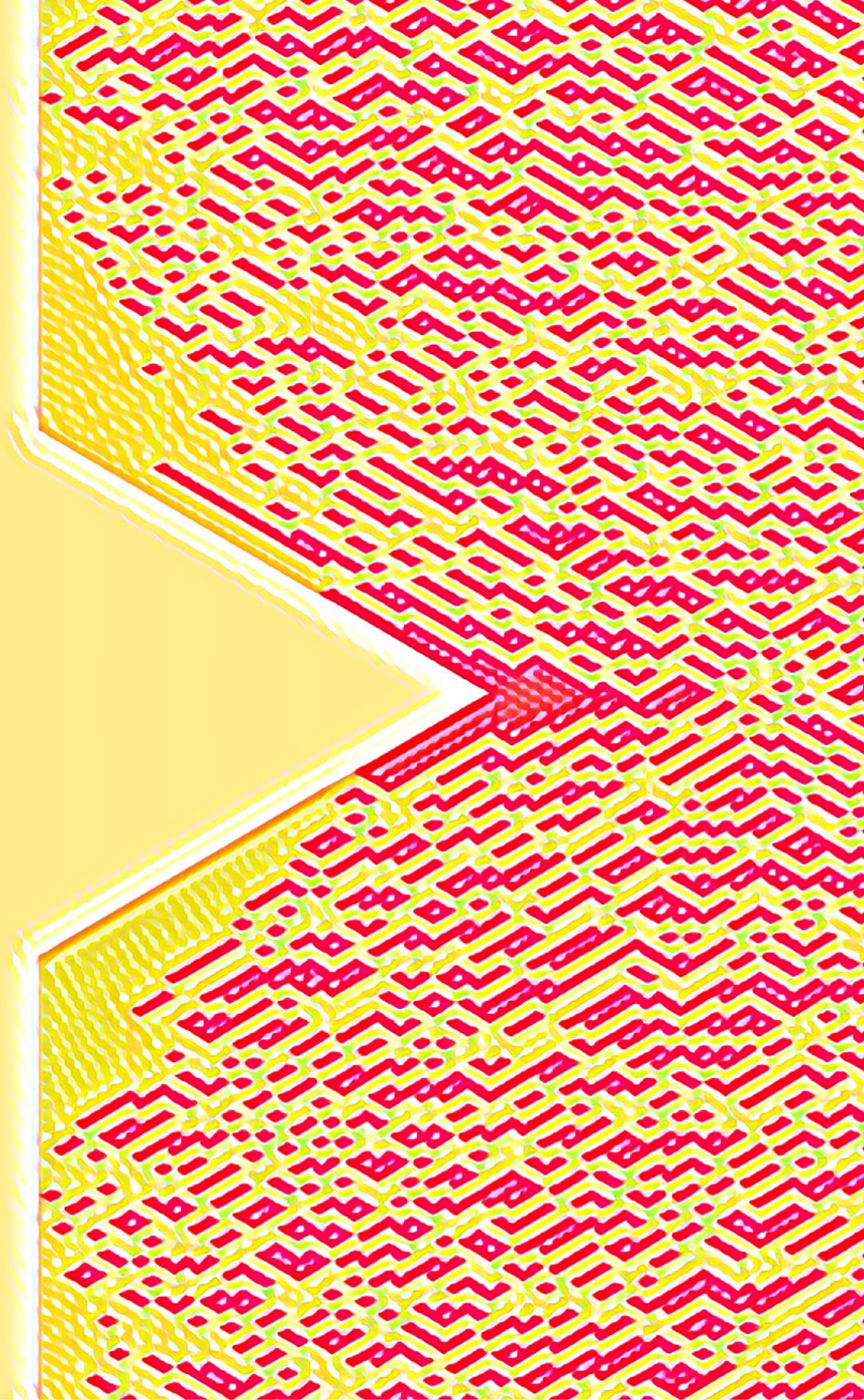
Как нарисованы многочисленные картинки в этом конспекте?

Оказывается, замощений данной большой формы ОЧЕНЬ. МНОГО. Например $\#\Omega_{4,4,4} = 232{,}848$, $\#\Omega_{10,10,10} \approx 9.26 * 10^{33}$, $\#\Omega_{20,20,20} \approx 1.6 * 10^{136}$. То есть, просто перечислить все замощения и выбрать среди них одно наугад (для $\mathbb{M}_1$) вряд ли удастся.

На помощь приходят **цепи Маркова**. А именно, вместо того, чтобы перебирать всевозможные замощения, будем перебирать замощения *случайно*. Начнем с какого-нибудь (например, с “пустого”), и будем случайно его менять, добавляя или убирая кубики. Оказывается, за относительно небольшое число шагов (порядка $\max\{a, b, c\}^4$ для шестиугольника) то, что мы будем видеть, почти совпадет с желаемым распределением.

Используя более хитрый coupling from the past, можно получить *точную* выборку из искомого распределения.

Обсудим, **как** надо случайно менять замощение.



Вероятностное пространство

(Конечное) **вероятностное пространство** - это некоторое конечное множество $W = \{w\}$, и функция $p\colon W \to [0,1]$, называемая **вероятностью** или **вероятностной мерой**, такая, что $\sum_{w \in W} p(w) = 1$. Мы мыслим себе, что w кодирует результат какого-то эксперимента, и результат этот случайный.

- Пусть есть монетка с вероятностью выпадения орла p и решки $1-p$. Вероятностное пространство для двух бросаний монетки имеет вид

w	ОО	ОР	РО	РР
$p(w)$	p^2	$p(1-p)$	$p(1-p)$	$(1-p)^2$

- Пусть W - множество всех замощений шестиугольника $\Omega_{a,b,c}$, а $p(w)$ соответствует, например, $\mathbb{M}_1$ (то есть, $p(w)$ одинаково для всех замощений).
- В случае параметрической модели, $p(w) = \mathbb{M}_{\vec{x}}(w)$ уже зависит от замощения w, как было определено выше.

Теперь наша задача - разобраться с **марковскими операторами**, которые моделируют случайные перестройки замощений. Формальное определение такое.

Марковским оператором T на пространстве W называется матрица $T(w, w')$, $w, w' \in W$, с неотрицательными элементами, и такая, что $\sum_{w' \in W} T(w, w') = 1$ для каждого $w \in W$.
(Иногда также говорят “стохастическая матрица”.)

Марковский оператор действует линейно на вероятностных мерах p, то есть, меняет вероятность.

Марковские операторы

Пусть p - вероятностная мера на W и T - Марковский оператор. Тогда определим другую вероятностную меру pT так:

$$pT(w) = \sum_{w' \in W} p(w')T(w', w).$$

3. pT - тоже вероятностная мера

Если представить себе лягушку, которая случайно прыгает по пространству W, и что $T(w, w')$ - вероятность прыгнуть в w' из w, то смысл pT такой. Пусть лягушка сначала выбрала себе место согласно p, и потом прыгнула по правилу T. Тогда pT - это новое распределение лягушки после прыжка.

4. Распределение лягушки после n прыжков имеет вид pT^n, где T^n - степень матрицы.

Рассмотрим примеры для пространства про 2 бросания монетки. Пусть T_1 - шаг, отвечающий перебору второй монетки, а при T_2 мы сначала выбираем монетку случайно с вероятностью $1/2$, и потом ее перебрасываем. Матрицы будут такие (строки и столбцы нумеруют конфигурации OO, OP, PO, PP):

$$\mathrm{T1} := \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{T2} := \begin{pmatrix} p & (1-p)/2 & (1-p)/2 & 0 \\ p/2 & 1/2 & 0 & (1-p)/2 \\ p/2 & 0 & 1/2 & (1-p)/2 \\ 0 & p/2 & p/2 & 1-p \end{pmatrix}$$

Стационарное распределение

Если лягушка прыгает долго, то она может забыть свое начальное состояние, и ее распределение сходится к так называемому стационарному p_{st}, где

$$p_{st}T = p_{st}.$$

Это линейное однородное уравнение, которое в зависимости от структуры T имеет одномерное или более пространство решений. Из решений однородного уравнения мы выбираем те, для которых сумма элементов p_{st} равна единице. Таким образом, мы получаем одну или больше вероятностную меру. Такие меры p_{st} называются **стационарными**.

Посмотрим на степени матриц T_1 и T_2 для конкретного $p = 0.3$.

5. Матрица T_1 идемпотентна, то есть, в любой степени совпадает с собой

Матрица T_2 в большой степени выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \\ 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \\ 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \\ 0.09 & 0.21 & 0.21 & 0.49 \end{pmatrix}$$

Если все строчки одинаковые (для T_1 это не так, а для T_2 так), это значит, что стационарное распределение единственно, и лягушка к нему сходится. Заметим, что для T_2 мы сходимся к распределению двух бросаний монетки - потому что понятно, что за один шаг T_2 его сохраняет.

В чем проблема с T_1, почему оно не сходится? Оказывается, потому что оно не затрагивает первую монетку, то есть, не *перемешивает* пространство.

Если цепь “перемешивает” все пространство, то стационарное распределение единственно, и к нему есть сходимость.

ОБРАТИМОСТЬ

Пусть цепь “перемешивает”. Как теперь понять, какое распределение будет стационарным? Решать уравнение $p_{st}T = p_{st}$ может быть очень сложно (вспомните, что замощений очень много). На помощь приходят обратимые цепи Маркова, для которых проверить стационарность очень просто.

Цепь T называется **обратимой** относительно распределения p_{rev}, если

$$p_{rev}(w)T(w, w') = p_{rev}(w')T(w', w)$$

для всех $w, w' \in W$. (В физике это соотношение называется **уравнением детального баланса**).

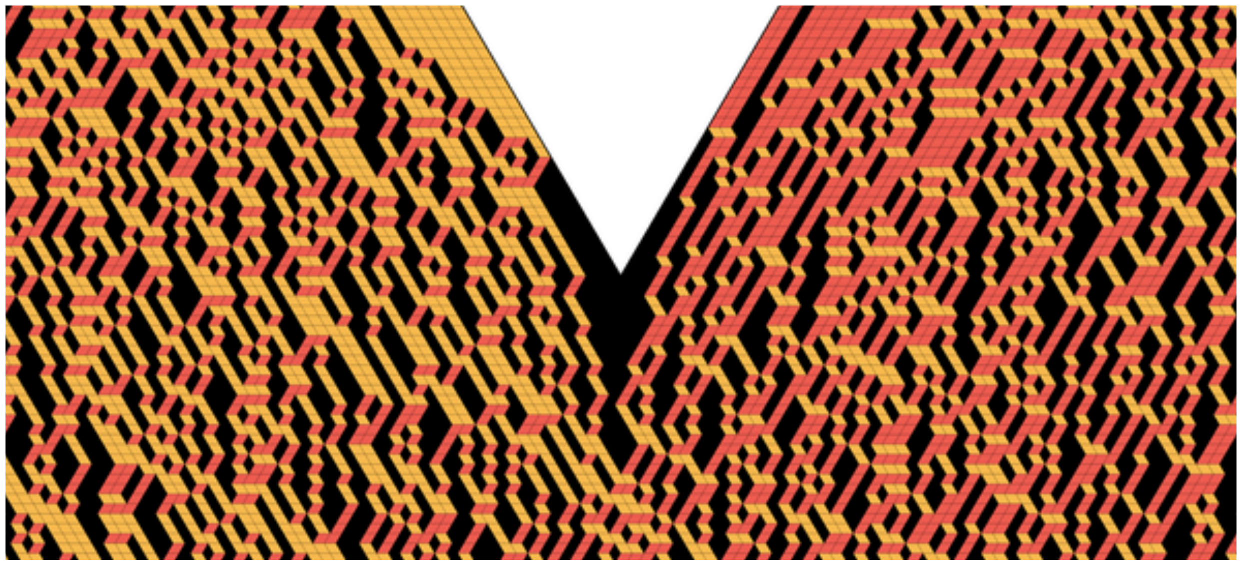
6. Для обратимой цепи имеем $p_{rev}T = p_{rev}$.

В итоге: если цепь “перемешивает” и обратима относительно распределения p_{rev}, то, начиная с любого элемента $w \in W$ и делая много шагов цепи, лягушка будет распределена почти как p_{rev}.

В приложении к замощениям, у нас уже есть p_{rev} - это наши меры $\mathbb{M}_1$ или $\mathbb{M}_{\vec{x}}$.

Задача состоит в построении марковской цепи на замощениях, которая “перемешивает” и обратима относительно p_{rev}. Желательно, чтобы цепь была попроще - так ее можно будет реализовать на компьютере. Тогда, начиная с любого замощения (например, с пустого), и делая много шагов, мы получим картинку, которая будет неотличима от искомого равномерного распределения.

В задачах есть также улучшение этой идеи - каплинг из прошлого (coupling from the past) - который позволяет достигать точной выборки за конечное (но случайное) число шагов.



Глауберова динамика

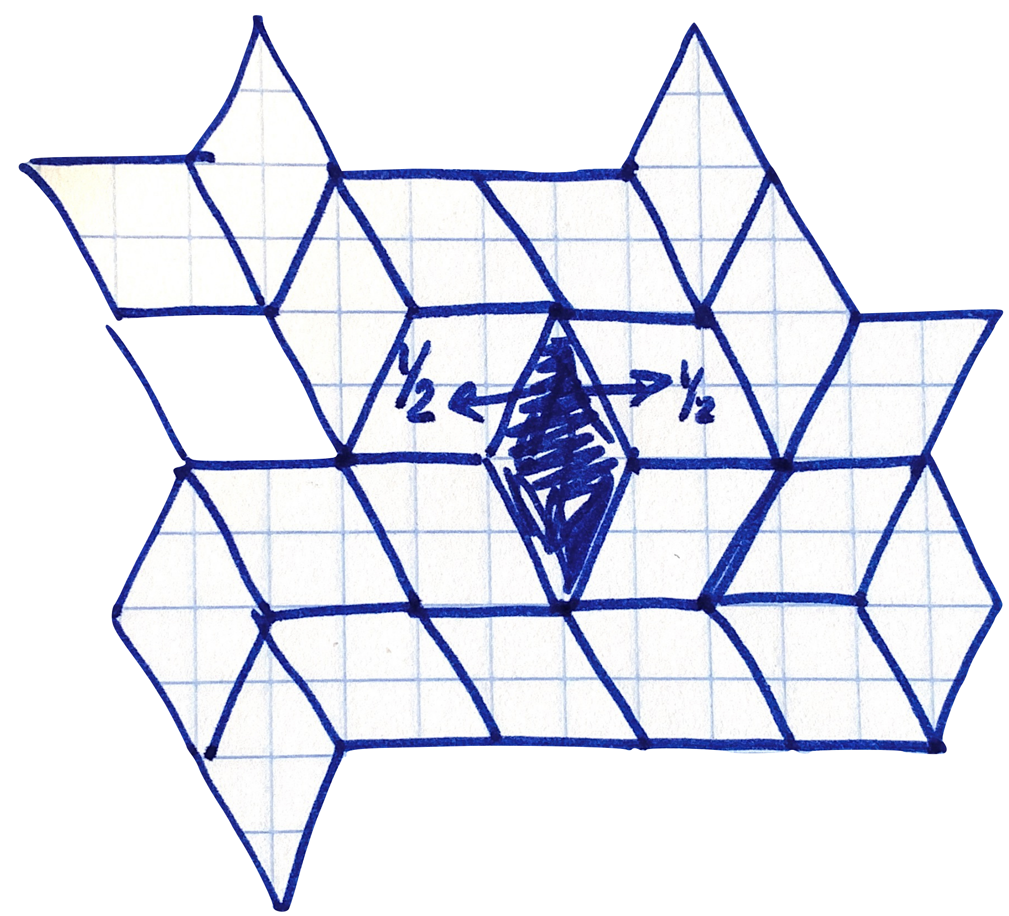
Сосредоточимся на равномерном случае $\mathbb{M}_1$. Мы хотим построить (как можно более простую) цепь на замощениях шестиугольника $\Omega_{a,b,c}$, так, чтобы она "перемешивала" и была обратимой относительно равномерного распределения $\mathbb{M}_1$. Обратимость означает, что для любых двух замощений w, w' имеем $T(w,w') = T(w',w)$ (действительно, ведь $\mathbb{M}_1(w) = \mathbb{M}_1(w')$).

Построим цепь, которая действует по таким правилам:

- Выберем случайно один из вертикальных ромбиков, которые внутри шестиугольника
- Бросим монетку (орел или решка с вероятностью $1/2$)
- Если орел и наш ромбик может подвинуться вправо, то подвинем его вправо ("добавим кубик")
- Если решка и наш ромбик может подвинуться влево, то подвинем его влево ("уберем кубик")

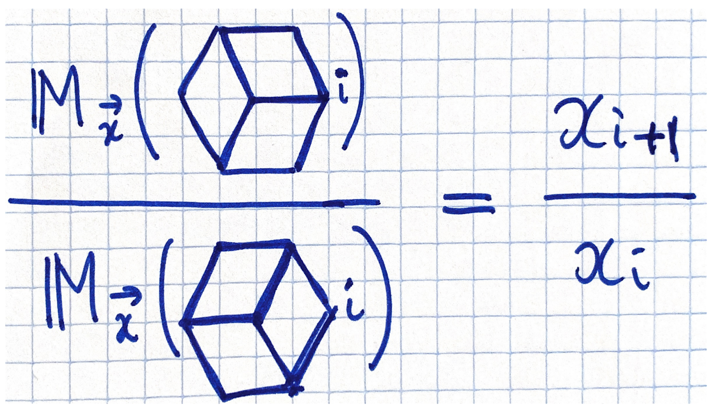
7. Проверьте обратимость для этой цепи

Таким образом, если гнать эту цепь очень долго, то получится равномерное распределение. Toninelli & Laslier доказали, что число шагов, необходимых до равномерного распределения - порядка четвертой степени линейного размера многоугольника.

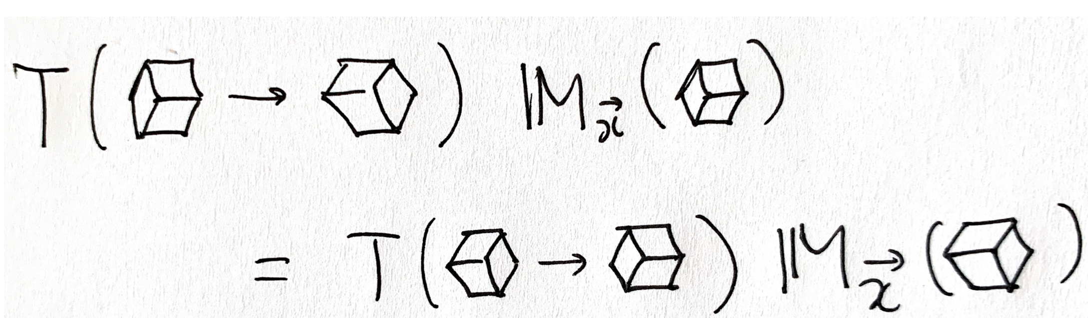


ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Если вместо равномерной меры взять $\mathbb{M}_{\vec{x}}$ (в частности, $q^{\pm\mathrm{vol}}$), то аналогичную цепь тоже можно построить. Для этого вспомним соотношение весов при добавлении/удалении кубика:



Таким образом, мы хотим, чтобы на i-м уровне в замощении было выполнено следующее уравнение детального баланса:



8. Проверьте обратимость для цепи с параметрами

Этого можно достичь, если честную монетку из предыдущей марковской цепи заменить на монетку, зависящую от номера уровня, и с вероятностью “вправо”, равной

$$p_i = \frac{x_i}{x_i + x_{i+1}}.$$

Для $q^{\pm\mathrm{vol}}$ получаем, что все p_i одинаковые, и равны, соответственно, $\dfrac{q}{1+q}$ для плюс объема, и $\dfrac{1}{1+q}$ для минус объема.

Глауберова динамика хороша для рисования картинок, но она “**не интегрируемая**” (то есть, ее сложно анализировать асимптотически - хотя и удается). В следующей главе мы рассмотрим еще одно семейство марковских цепей на замощениях, для которых интегрируемость “более явная”.

Глава 4

Случайные перестройки для параметрической модели

- Напоминание: Параметрическая модель случайных замощений
- Напоминание: обратимые марковские цепи
- Обобщение случая обратимых марковских цепей - “интегрируемые” семейства распределений
- Переворот геометрического распределения
- Приложение к параметрической модели случайных замощений
- Действие симметрической группы на случайных замощениях
- Обращение параметра q (симуляция)
- Дальнейшие идеи и приложения

НАПОМИНАНИЯ

В последней лекции будет излагаться довольно простая новая идея, как строить марковские цепи на параметрических замощениях. Эти цепи сильно отличаются от глауберовой динамики, тем они и хороши. За кулисами построения новых марковских цепей стоит замечательное **уравнение Янга-Бакстера**. Это уравнение - ключ почти ко всей “точно решаемой” статфизике - и, оказывается, дает что-то новое для случайных замощений.

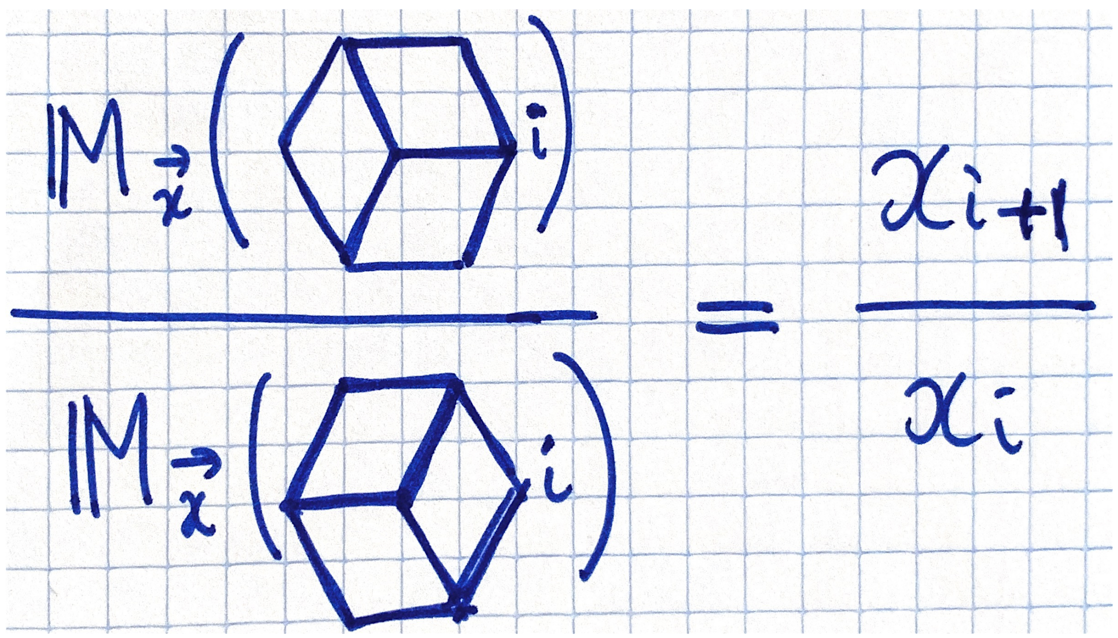
Начнем с напоминаний о том, что нам потребуется сейчас:

- Параметрическая модель случайных замощений
- Обратимые марковские цепи

Параметрическая модель зависит от положительных $x_1, \ldots, x_N$ (N - высота многоугольника), и определяется

$$\mathbb{M}_{\vec{x}}(\pi) = \frac{\text{вклад замощения в многочлен Шура}}{s_{\vec{\ell}}(x_1, \ldots, x_N)}.$$

Здесь “вклад” - это моном $x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2|-|\vec{\ell}^1|-1} \ldots x_N^{|\vec{\ell}^N|-|\vec{\ell}^{N-1}|-(N-1)}$. Соответственно, статумма - это просто многочлен Шура с переменными $x_1, \ldots, x_N$.



ОБРАТИМОЕ И ИНТЕГРИРУЕМОЕ

Пусть есть вероятностное распределение p на конечном множестве W. Маяковская цепь на W называется обратимой относительно p, если для всех $w_1, w_2 \in W$ выполняется

$$p(w_1)T(w_1, w_2) = p(w_2)T(w_2, w_1).$$

Если цепь обратима, то p является ее стационарным распределением (не меняется под действием марковской цепи). Кроме того, при некоторых условиях на T (типа “перемешивания”), если стартовать цепь с какого-то фиксированного элемента, и сделать много шагов, то в пределе мы увидим само распределение p.

Таким образом, чтобы сделать выборку из какого-то сложно устроенного распределения, достаточно придумать обратимую марковскую цепь для этого распределения, и “прокрутить” ее достаточно много раз.

Можно обобщить эту конструкцию так. Пусть у нас есть несколько марковских цепей T_i и несколько распределений p_j на одном и том же множестве W, причем $p_j T_i = p_{f_i(j)}$. То есть, действуя каждой цепью на каждое из распределений, получим какое-то другое распределение. Мы таким образом имеем перестановку $f_i(j)$, которая отвечает цепи T_i.

Эта ситуация может показаться немного странной, но давайте вспомним, что для замощений у нас было много распределений $\mathbb{M}_{\overrightarrow{x}}$, зависящих от параметров $\overrightarrow{x}$. Имея много цепей, можно делать много операций над $\overrightarrow{x}$. В частности, можно было бы пробовать менять параметры, или менять их порядок (или и то, и то).

В квантовой механике интегрируемость - это наличие в системе многих коммутирующих операторов (читай матриц). В нашем марковском случае замощений наличие многих “хороших” операторов над $\mathbb{M}_{\overrightarrow{x}}$ тоже отвечает некоторой “интегрируемости”.

Мы построим операторы, которые переставляют метки в $\mathbb{M}_{\overrightarrow{x}}$. (Кстати, нормировочная константа для всех перестановок одна - многочлен Шура)

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Немного вероятностной классики.

Пусть есть монетка с вероятностью орла $q \in (0,1)$. Будем ее бросать до тех пор, пока не выпадет решка. Вероятность того, что будет сделано $k \geq 0$ бросков до решки (не включая саму решку), равна $(1-q)q^k$.

1. Посчитайте эту вероятность и среднее число бросков

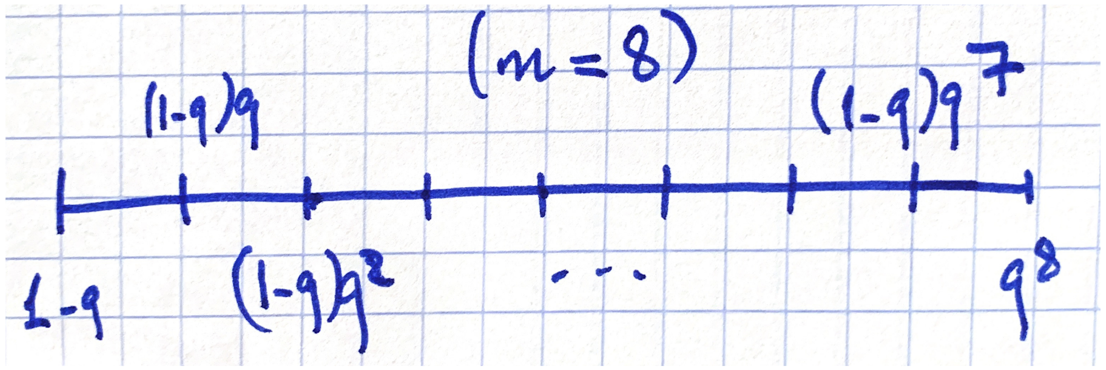
Это так называемое **геометрическое распределение**.

А теперь рассмотрим более реалистичную ситуацию - зададимся наперед каким-то числом шагов m, после которого ждать перестанем. Тогда вероятность, что будет сделано m шагов, равна q^m (а потом ждать перестали). Это так называемое **усеченное геометрическое распределение**.

Давайте будем обозначать это распределение $X_m(q)$. Здесь параметр q должен быть от 0 до 1.

2. Почему веса суммируются в единицу?

3. Посчитайте среднее усеченного распределения.



Перенормированное распределение

Рассмотрим другой вариант геометрического распределения – **перенормированное геометрическое распределение** на множестве $\{0,1,\ldots,m\}$. Это распределение получается, если бросать монетку, ожидая первой решки, но при этом наложить условие, что число бросков не превосходит m.

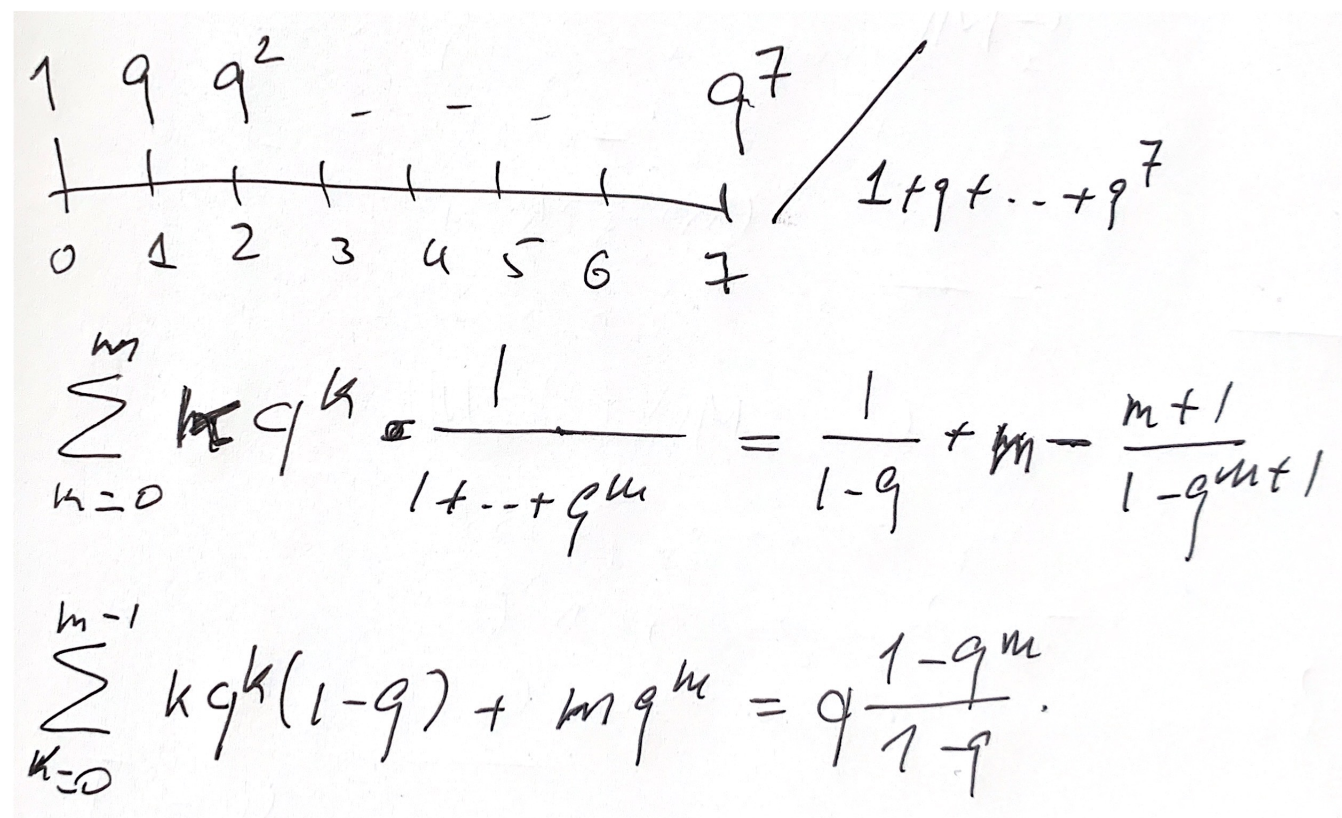
Тогда вероятность, что будет ровно k бросков ($k = 0,1,\ldots,m$) пропорциональна q^k, и равна, соответственно,

$$\mathrm{Prob}(k) = \frac{q^k}{1+q+\ldots+q^m} = \frac{1-q}{1-q^{m+1}}\, q^k.$$

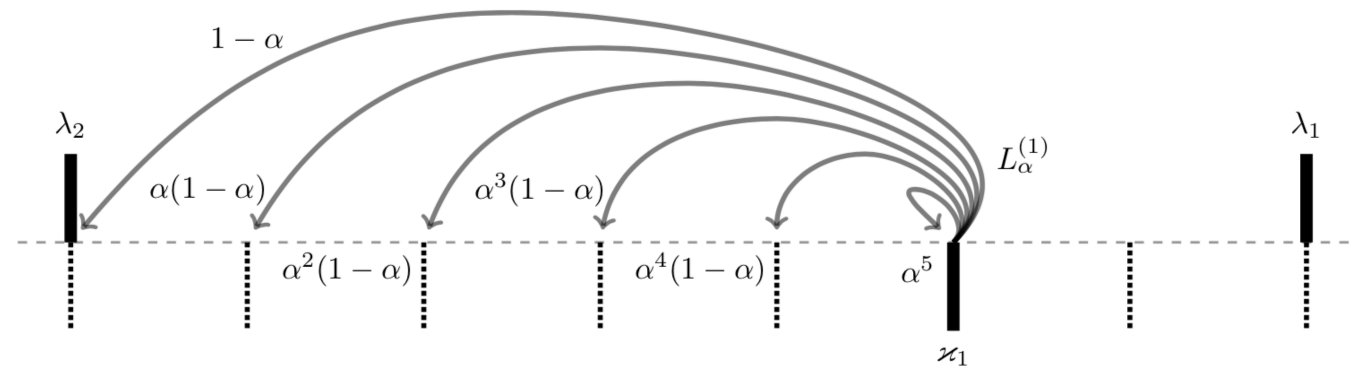
Давайте будем обозначать это распределение $Y_m(q)$.

Отметим, что здесь параметр q не обязательно должен быть меньше 1, и может быть любым положительным числом. В случае $q = 1$ распределение становится равномерным.

4. Посчитайте среднее перенормированного распределения.



Лемма о перевороте



Оказывается, что если начать с перенормированного геометрического распределения с параметром α, и сделать прыжок налево, пользуясь усечённым распределением с этим же параметром, то в результате параметр α перенормированного распределения **перевернётся**.

Этот факт проверяется «руками», однако обнаружить его мне помогло уравнение Янга-Бакстера.

Итак, **лемма**. Пусть $0 \le \alpha \le 1$ и $m \ge 0$. Если начать с $Y = Y_{\alpha^{-1}}(m)$ и разыграть случайную величину с распределением $X_Y(\alpha)$, то полученная случайная величина имеет распределение $Y_m(\alpha)$. Другими словами, “лягушка” прыгает только влево так, как будто мы разыгрываем усеченное распределение на $\{0,1,\ldots,Y\}$. Это отвечает марковской цепи

$$T(k,k') = \begin{cases} \alpha^k, & k = k' \\ (1-\alpha)\alpha^{k'}, & k' < k \\ 0, & k' > k \end{cases}$$

Доказательство. Нормировка $\sum_{k=0}^{m} \alpha^k$ у $Y_m(\alpha)$ и $Y_m(\alpha^{-1})$ одинакова, поэтому ее можно не писать. Запишем теперь:

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha^{-k} T(k,k') = \sum_{k=k'+1}^{m} \alpha^{-k}(1-\alpha)\alpha^{k'} + \alpha^{-k}\alpha^{k}$$
$$= \alpha^{k'-m} - 1 + 1 = \alpha^{k'-m}.$$

Мы видим, что результат пропорционален $\alpha^{k'}$, что и требовалось. ∎

5. Как работает лемма о перевороте в крайних случаях $\alpha = 0$, $\alpha = 1$?

Замечания о перевороте

- Переворот параметра в $Y_m(\alpha)$ путем левого прыжка возможен только в одну сторону, от $Y_m(\alpha^{-1})$ к $Y_m(\alpha)$. Иначе вероятности в цепи T будут отрицательными, а нам так не надо.

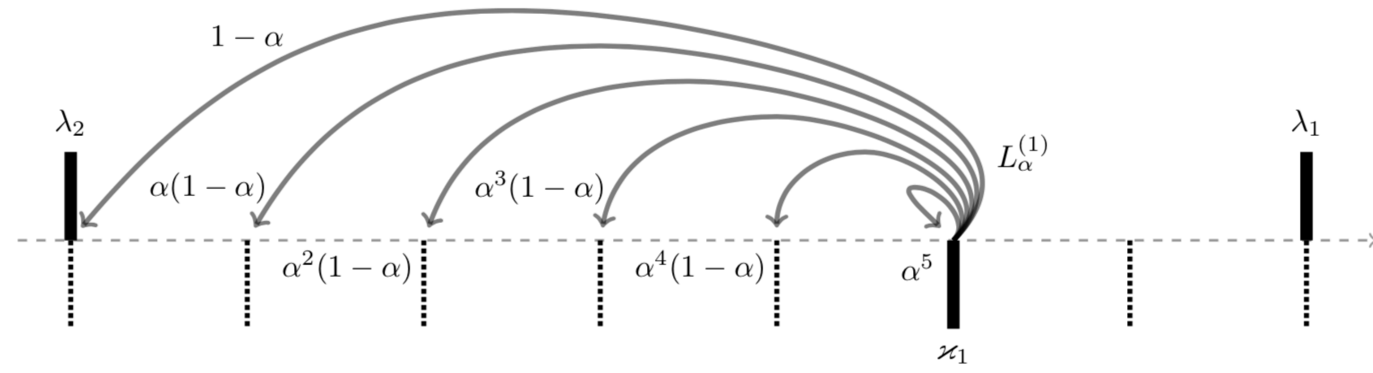
- Зато в другую сторону, от $Y_m(\alpha)$ к $Y_m(\alpha^{-1})$, можно перейти, прыгая вправо!

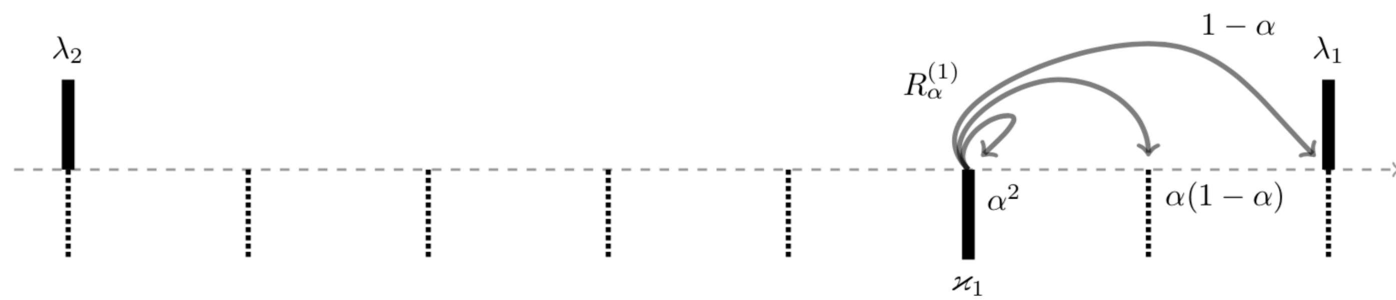
- Заметим, что переворот (в любую из сторон) можно делать гораздо проще (и не случайно, а детерминированно) – просто возьмем и отразимся относительно середины отрезка.

- По сравнению с детерминированным отражением, у наших операций L и R (левого и правого прыжков) есть преимущества:

  - Случайность добавляет свойство “перемешивания”

  - Есть некоторая дополнительная “марковость” - для свойства “мы прыгнули на расстояние ближе чем n от края” знания исходной точки левого прыжка не требуется! (Только того, что она была дальше чем n)



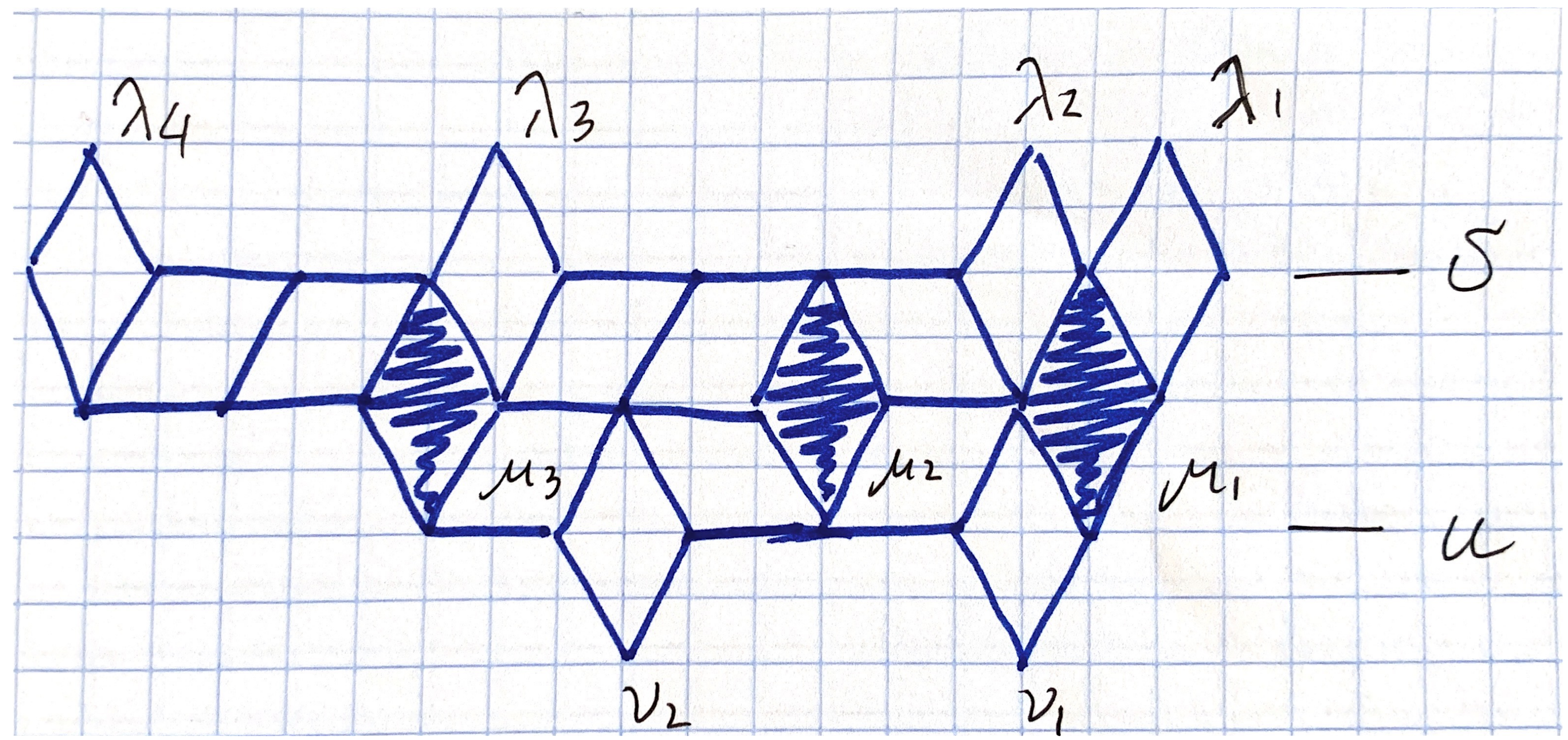


6. Выпишите и проверьте лемму о перевороте через правые прыжки.

7. Сформулируйте четко и докажите свойство “дополнительной марковости”

Условное распределение на одном уровне в замощениях

Пусть на каком-то уровне есть параметры $u, v > 0$ (то есть, $x_i = u,\ x_{i+1} = v$). Утверждается, что если зафиксировать конфигурации λ и ν выше данной μ (как на рисунке), то тогда условное распределение μ имеет вероятностные веса, пропорциональные$v^{|\lambda|-|\mu|}u^{|\mu|-|\nu|}$, что в свою очередь пропорционально $(v/u)^{|\mu|}$.



Почему так, легко видеть по аналогии с формулой отношения двух вероятностных весов при добавлении одного кубика.

А дальше с вероятностным весом $(v/u)^{|\mu|}$ можно сделать следующее - оказывается, этот вес - это просто произведение весов индивидуальных μ_i, а вес каждого из них - перенормированное геометрическое распределение. То есть, мы доказали следующий факт:

Утверждение. При фиксированных λ и ν распределение каждого μ_i – независимое перенормированное геометрическое распределение с параметром v/u, помещенное на отрезок от $\max(\lambda_{i+1}, \nu_i)$ до $\min(\lambda_i, \nu_{i-1})$ (здесь крайние случаи описываются очевидным образом).

ПЕРЕВОРОТ ЗАМОЩЕНИЙ И СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

Теперь вспомним, что левый прыжок можно применять, когда отношение $v/u \leq 1$, а правый - когда $v/u \geq 1$. (Если $u = v$, то и левый, и правый сдвиги - это тождественное преобразование.)

Определим операции $L^{(j)}$, $R^{(j)}$ на замещениях: левый прыжок $L^{(j)}$ – это просто одновременное выполнение левых прыжков независимо для каждого μ_i, с параметром x_{j+1}/x_j. Аналогично для $R^{(j)}$.

Пусть теперь $S^{(j)}$ - это $L^{(j)}$ если $x_{j+1} \leq x_j$, и $R^{(j)}$ иначе. Мы получаем следующее утверждение:

Теорема. Марковские операторы $S^{(j)}, j = 1,\ldots,N-1$, образуют действие симметрической группы на множестве параметрических распределений $\{\mathbb{M}_{\overrightarrow{y}}\}$ на замощениях заданной пилообразной фигуры с заданной верхней строчкой $\overrightarrow{\ell}$. Здесь $\overrightarrow{y}$ пробегает все перестановки данного вектора $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ (с положительными компонентами).

Теперь рассмотрим частный случай, когда $x_1 > x_2 > \ldots > x_N$ (в частности, это включает в себя меру $q^{-\mathrm{vol}}$, соответствующую $x_i = q^{i-1}$, $0 < q < 1$).

Тогда полный переворот $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_N) \to \overrightarrow{x}^{op} = (x_N, \ldots, x_1)$ можно осуществить применением только L операторов (причем, многими способами - способов столько, сколько приведенных слов для перестановки полного переворота). Значит, вертикальные ромбики будут всегда прыгать налево (и, кроме того, будет выполнена та загадочная “марковость” на краю).

Для q-распределений такие полные перевороты можно симулировать на компьютере (см. следующую страницу). Это можно использовать для выборки из распределений, если гнать такие цепи достаточно долго (вопрос еще требует изучения).

СИМУЛЯЦИИ ПЕРЕВОРОТА

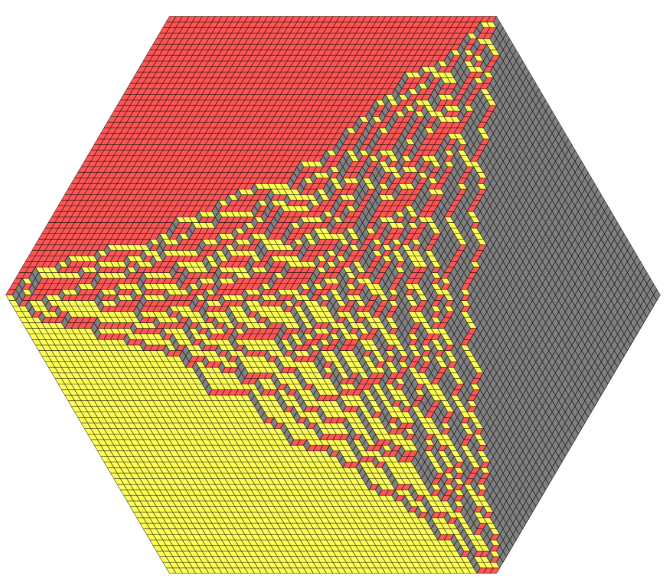
https://lpetrov.cc/simulations/2019-04-30-qvol/

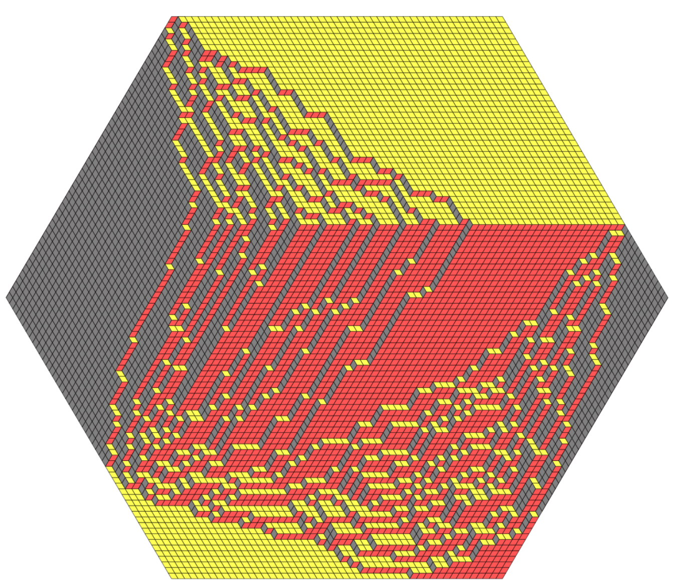
Пока основное приложение для конечных замощений – марковская цепь для перевода случайного разбиения $q^{-\mathrm{vol}}$ в $q^{+\mathrm{vol}}$, при котором все вертикальные ромбики едут налево, а левая граница меняется независимо от всей остальной конфигурации.

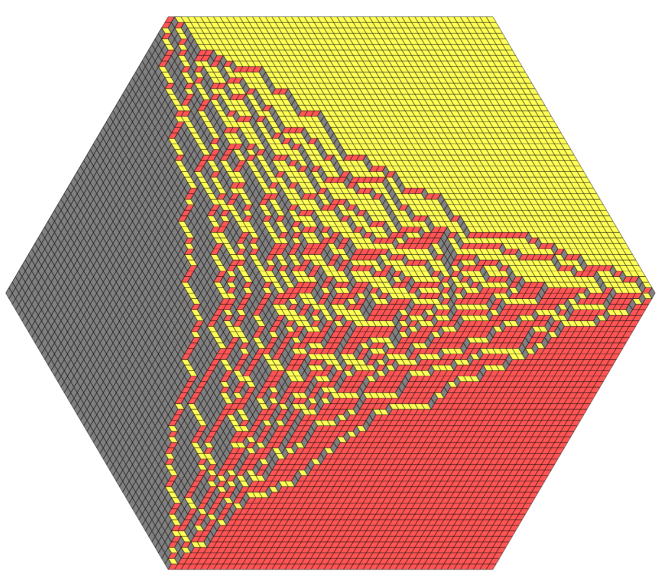
Ссылка на видеофайлы – выше ⬆️

Начало, середина, и конец одного такого мультика изображены ниже ⬇️

Начало мультика $q^{-\mathrm{vol}}$ - точный семпл по алгоритму Бородина-Горина-Райнса (статья 1, статья 2, ссылка на программу тут внизу страницы)







ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

- Оказывается, с помощью переворотов с левыми прыжками, и пользуясь "дополнительной марковостью", можно "отправить в прошлое" одну замечательную случайную систему частиц под названием TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process). TASEP моделирует неравновесную термодинамическую ситуацию: заполнили пол-комнаты газом, а во второй половине вакуум - и открыли перегородку.
  Отправка в прошлое достигается путем рассмотрения бесконечных замощений и переходом к пределу $q \to 1$. Это наводит некоторую новую (пока не до конца понятную) "обратимость" на необратимую термодинамическую модель. Это результат весны 2019 года (LP & Axel Saenz, https://arxiv.org/abs/1907.09155)

- Что можно еще так переворачивать, кроме усеченного геометрического распределения? Есть много деформаций, связанных с $q-$ и эллиптической комбинаторикой и алгеброй…