

Глава 4

Случайные перестройки для параметрической модели

- Напоминание: Параметрическая модель случайных замощений
- Напоминание: обратимые марковские цепи
- Обобщение случая обратимых марковских цепей - "интегрируемые" семейства распределений
- Переворот геометрического распределения
- Приложение к параметрической модели случайных замощений
- Действие симметрической группы на случайных замощениях
- Обращение параметра q (симуляция)
- Дальнейшие идеи и приложения

НАПОМИНАНИЯ

В последней лекции будет излагаться довольно простая новая идея, как строить марковские цепи на параметрических замощениях. Эти цепи сильно отличаются от глауберовой динамики, тем они и хороши. За кулисами построения новых марковских цепей стоит замечательное **уравнение Янга-Бакстера**. Это уравнение - ключ почти ко всей "точно решаемой" статфизике - и, оказывается, дает что-то новое для случайных замощений.

Начнем с напоминаний о том, что нам потребуется сейчас:

- Параметрическая модель случайных замощений
- Обратимые марковские цепи

Параметрическая модель зависит от положительных x_1, \dots, x_N (N - высота многоугольника), и определяется

$$M_{\vec{x}}(\pi) = \frac{\text{вклад замощения в многочлен Шура}}{s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N)}.$$

Здесь "вклад" - это моном $x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2| - |\vec{\ell}^1| - 1} \dots x_N^{|\vec{\ell}^N| - |\vec{\ell}^{N-1}| - (N-1)}$. Соответственно, статумма - это просто многочлен Шура с переменными x_1, \dots, x_N .

$$\frac{M_{\vec{x}}(\text{Young diagram with box at end of 2nd row, labeled } i)}{M_{\vec{x}}(\text{Young diagram with box at end of 1st row, labeled } i)} = \frac{x_{i+1}}{x_i}$$

ОБРАТИМОЕ И ИНТЕГРИРУЕМОЕ

Пусть есть вероятностное распределение p на конечном множестве W . Маяковская цепь на W называется обратимой относительно p , если для всех $w_1, w_2 \in W$ выполняется

$$p(w_1)T(w_1, w_2) = p(w_2)T(w_2, w_1).$$

Если цепь обратима, то p является ее стационарным распределением (не меняется под действием марковской цепи). Кроме того, при некоторых условиях на T (типа "перемешивания"), если стартовать цепь с какого-то фиксированного элемента, и сделать много шагов, то в пределе мы увидим само распределение p .

Таким образом, чтобы сделать выборку из какого-то сложно устроенного распределения, достаточно придумать обратимую марковскую цепь для этого распределения, и "прокрутить" ее достаточно много раз.

Можно обобщить эту конструкцию так. Пусть у нас есть несколько марковских цепей T_i и несколько распределений p_j на одном и том же множестве W ,

причем $p_j T_i = p_{f_i(j)}$. То есть, действуя каждой цепью на каждое из распределений, получим какое-то другое распределение. Мы таким образом имеем перестановку $f_i(j)$, которая отвечает цепи T_i .

Эта ситуация может показаться немного странной, но давайте вспомним, что для замощений у нас было много распределений $\mathbb{M}_{\vec{x}}$, зависящих от параметров \vec{x} . Имея много цепей, можно делать много операций над \vec{x} . В частности, можно было бы пробовать менять параметры, или менять их порядок (или и то, и то).

В квантовой механике интегрируемость - это наличие в системе многих коммутирующих операторов (читай матриц). В нашем марковском случае замощений наличие многих "хороших" операторов над $\mathbb{M}_{\vec{x}}$ тоже отвечает некоторой "интегрируемости".

Мы построим операторы, которые переставляют метки в $\mathbb{M}_{\vec{x}}$. (Кстати, нормировочная константа для всех перестановок одна - многочлен Шура)

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Немного вероятностной классики.

Пусть есть монетка с вероятностью орла $q \in (0,1)$.
Будем ее бросать до тех пор, пока не выпадет решка.
Вероятность того, что будет сделано $k \geq 0$ бросков до
решки (не включая саму решку), равна $(1 - q)q^k$.



1. Посчитайте эту вероятность и среднее число бросков

Это так называемое **геометрическое распределение**.

А теперь рассмотрим более реалистичную ситуацию -
зададимся наперед каким-то числом шагов m , после
которого ждать перестанем. Тогда вероятность, что
будет сделано m шагов, равна q^m (а потом ждать
перестали). Это так называемое **усеченное
геометрическое распределение**.

Давайте будем обозначать это распределение $X_m(q)$.

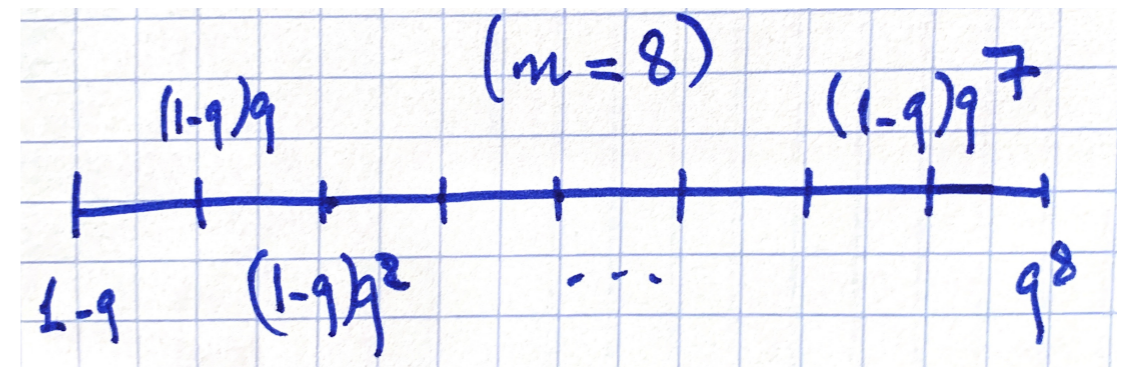
Здесь параметр q должен быть от 0 до 1.



2. Почему веса суммируются в единицу?



3. Посчитайте среднее усеченного распределения.



ПЕРЕНОРМИРОВАННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Рассмотрим другой вариант геометрического распределения – **перенормированное геометрическое распределение** на множестве $\{0, 1, \dots, m\}$. Это распределение получается, если бросать монетку, ожидая первой решки, но при этом наложить условие, что число бросков не превосходит m .

Тогда вероятность, что будет ровно k бросков ($k = 0, 1, \dots, m$) пропорциональна q^k , и равна, соответственно,

$$\text{Prob}(k) = \frac{q^k}{1 + q + \dots + q^m} = \frac{1 - q}{1 - q^{m+1}} q^k.$$

Давайте будем обозначать это распределение $Y_m(q)$.

Отметим, что здесь параметр q не обязательно должен быть меньше 1, и может быть любым положительным числом. В случае $q = 1$ распределение становится равномерным.



4. Посчитайте среднее перенормированного распределения.

The image shows a handwritten derivation for the expected value of the normalized geometric distribution. It starts with a number line from 0 to 7, with points labeled $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Above the line, the values $1, q, q^2, \dots, q^7$ are written. A diagonal line is drawn from the point 7 on the number line to the right, with the expression $1 + q + \dots + q^7$ written next to it. Below the number line, the following equation is written:

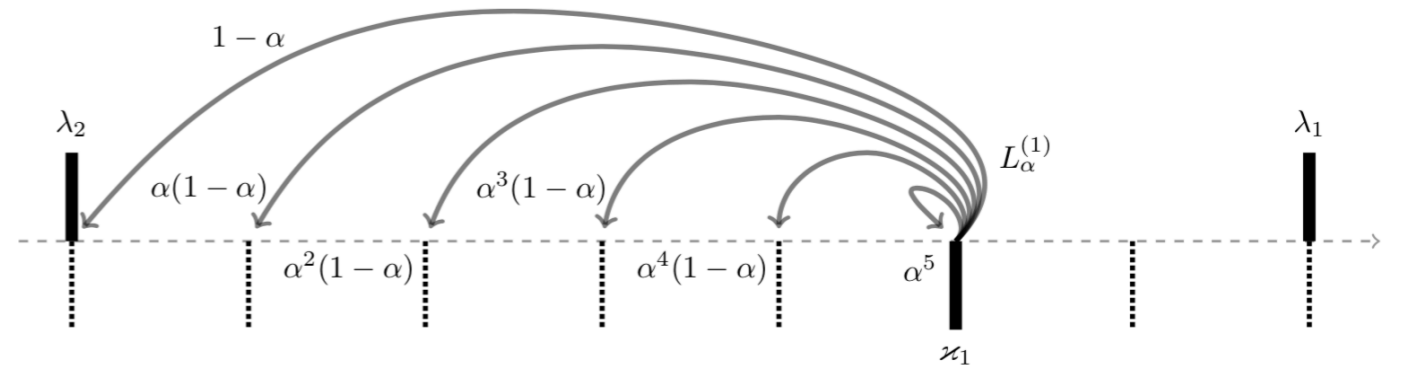
$$\sum_{k=0}^m k q^k = \frac{1}{1 + \dots + q^m} = \frac{1}{1 - q} + m - \frac{m+1}{1 - q^{m+1}}$$

Below this, another equation is written:

$$\sum_{k=0}^{m-1} k q^k (1 - q) + m q^m = q \frac{1 - q^m}{1 - q}.$$

ЛЕММА

ПЕРЕВОРОТЕ



Оказывается, что если начать с перенормированного геометрического распределения с параметром α , и сделать прыжок налево, пользуясь усечённым распределением с этим же параметром, то в результате параметр α перенормированного распределения **перевернётся**.

Этот факт проверяется «руками», однако обнаружить его мне помогло уравнение Янга-Бакстера.

Итак, **лемма**. Пусть $0 \leq \alpha \leq 1$ и $m \geq 0$. Если начать с $Y = Y_{\alpha^{-1}}(m)$ и разыграть случайную величину с распределением $X_Y(\alpha)$, то полученная случайная величина имеет распределение $Y_m(\alpha)$. Другими словами, «лягушка» прыгает только влево так, как будто мы разыгрываем усеченное распределение на $\{0, 1, \dots, Y\}$. Это отвечает марковской цепи

$$T(k, k') = \begin{cases} \alpha^k, & k = k' \\ (1 - \alpha)\alpha^{k'}, & k' < k \\ 0, & k' > k \end{cases}$$

Доказательство. Нормировка $\sum_{k=0}^m \alpha^k$ у $Y_m(\alpha)$ и $Y_m(\alpha^{-1})$ одинакова, поэтому ее можно не писать. Запишем теперь:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m \alpha^{-k} T(k, k') &= \sum_{k=k'+1}^m \alpha^{-k} (1 - \alpha) \alpha^{k'} + \alpha^{-k} \alpha^k \\ &= \alpha^{k'-m} - 1 + 1 = \alpha^{k'-m}. \end{aligned}$$

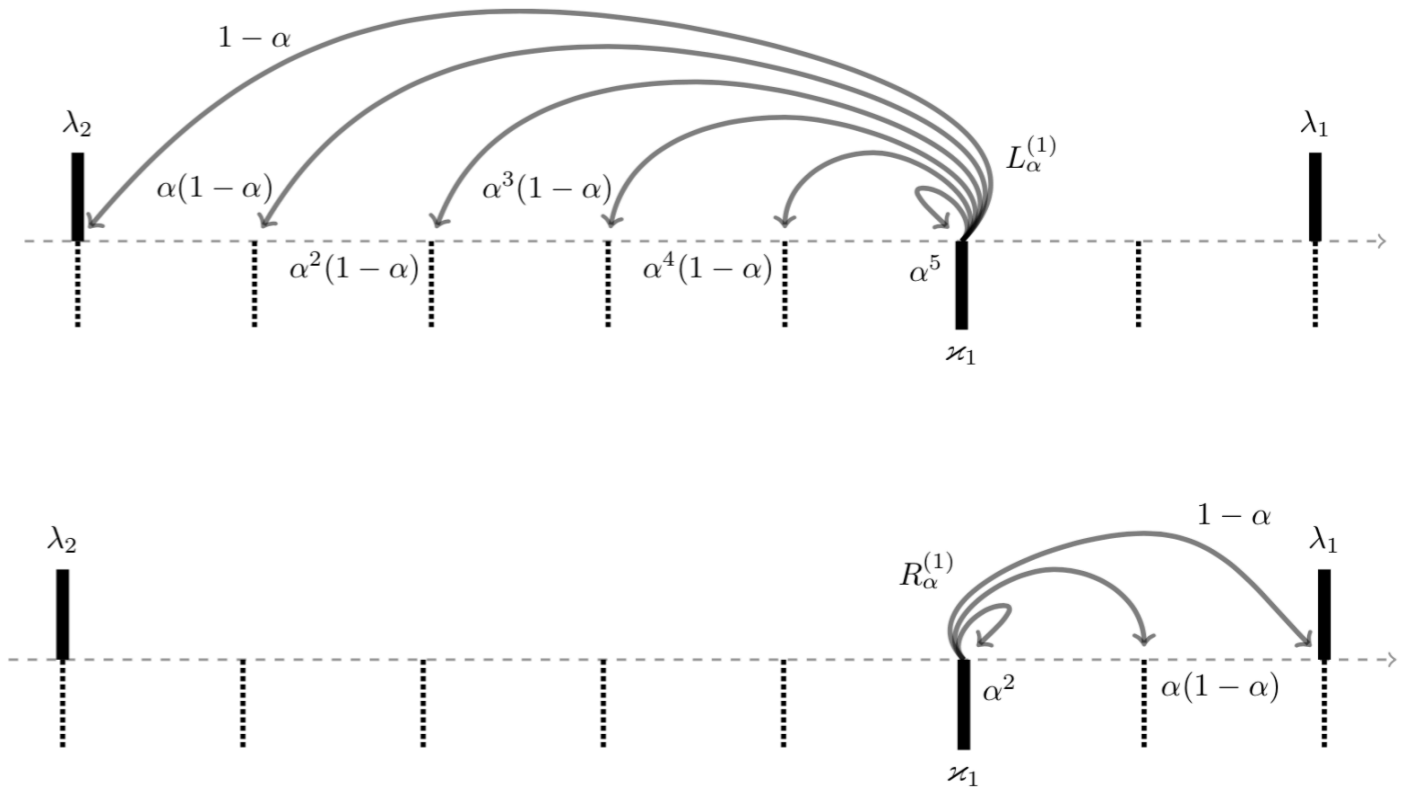
Мы видим, что результат пропорционален $\alpha^{k'}$, что и требовалось. ■



5. Как работает лемма о перевооте в крайних случаях $\alpha = 0$, $\alpha = 1$?

ЗАМЕЧАНИЯ О ПЕРЕВОРОТЕ

- Переворот параметра в $Y_m(\alpha)$ путем левого прыжка возможен только в одну сторону, от $Y_m(\alpha^{-1})$ к $Y_m(\alpha)$. Иначе вероятности в цепи T будут отрицательными, а нам так не надо.
- Зато в другую сторону, от $Y_m(\alpha)$ к $Y_m(\alpha^{-1})$, можно перейти, прыгая вправо!
- Заметим, что переворот (в любую из сторон) можно делать гораздо проще (и не случайно, а детерминированно) – просто возьмем и отразимся относительно середины отрезка.
- По сравнению с детерминированным отражением, у наших операций L и R (левого и правого прыжков) есть преимущества:
 - Случайность добавляет свойство “перемешивания”
 - Есть некоторая дополнительная “марковость” - для свойства “мы прыгнули на расстояние ближе чем n от края” знания исходной точки левого прыжка не требуется! (Только того, что она была дальше чем n)



6. Выпишите и проверьте лемму о перевороте через правые прыжки.



7. Сформулируйте четко и докажете свойство “дополнительной марковости”

УСЛОВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НА ОДНОМ УРОВНЕ В ЗАМОЩЕНИЯХ

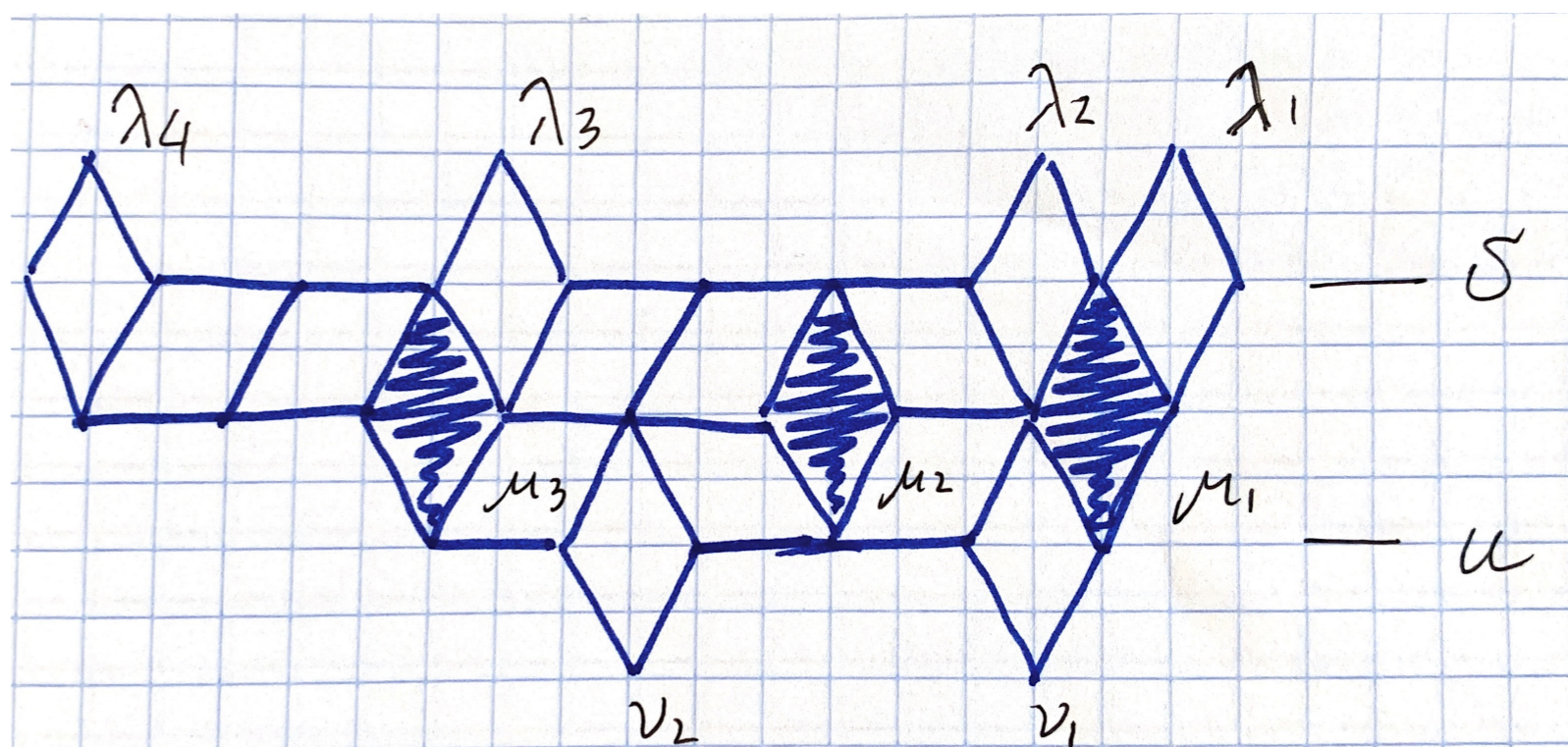
Пусть на каком-то уровне есть параметры $u, v > 0$ (то есть, $x_i = u, x_{i+1} = v$).

Утверждается, что если зафиксировать конфигурации λ и ν выше данной μ (как на рисунке), то тогда условное распределение μ имеет вероятностные веса, пропорциональные $v^{|\lambda|-|\mu|} u^{|\mu|-|\nu|}$, что в свою очередь пропорционально $(v/u)^{|\mu|}$.

Почему так, легко видеть по аналогии с формулой отношения двух вероятностных весов при добавлении одного кубика.

А дальше с вероятностным весом $(v/u)^{|\mu|}$ можно сделать следующее - оказывается, этот вес - это просто произведение весов индивидуальных μ_i , а вес каждого из них - перенормированное геометрическое распределение. То есть, мы доказали следующий факт:

Утверждение. При фиксированных λ и ν распределение каждого μ_i – независимое перенормированное геометрическое распределение с параметром v/u , помещенное на отрезок от $\max(\lambda_{i+1}, \nu_i)$ до $\min(\lambda_i, \nu_{i-1})$ (здесь крайние случаи описываются очевидным образом).



ПЕРЕВОРОТ ЗАМОЩЕНИЙ И СИММЕТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

Теперь вспомним, что левый прыжок можно применять, когда отношение $v/u \leq 1$, а правый - когда $v/u \geq 1$. (Если $u = v$, то и левый, и правый сдвиги - это тождественное преобразование.)

Определим операции $L^{(j)}$, $R^{(j)}$ на замещениях: левый прыжок $L^{(j)}$ – это просто одновременное выполнение левых прыжков независимо для каждого μ_i , с параметром x_{j+1}/x_j . Аналогично для $R^{(j)}$.

Пусть теперь $S^{(j)}$ - это $L^{(j)}$ если $x_{j+1} \leq x_j$ и $R^{(j)}$ иначе. Мы получаем следующее утверждение:

Теорема. Марковские операторы $S^{(j)}$, $j = 1, \dots, N - 1$, образуют действие симметрической группы на множестве параметрических распределений $\{\mathbb{M}_{\vec{y}}\}$ на замощениях заданной пилообразной фигуры с заданной верхней строчкой $\vec{\ell}$. Здесь \vec{y} пробегает все перестановки данного вектора $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$ (с положительными компонентами).

Теперь рассмотрим частный случай, когда $x_1 > x_2 > \dots > x_N$ (в частности, это включает в себя меру $q^{-\text{vol}}$, соответствующую $x_i = q^{i-1}$, $0 < q < 1$).

Тогда полный переворот $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N) \rightarrow \vec{x}^{op} = (x_N, \dots, x_1)$ можно осуществить применением только L операторов (причем, многими способами - способов столько, сколько приведенных слов для перестановки полного переворота). Значит, вертикальные ромбики будут всегда прыгать налево (и, кроме того, будет выполнена та загадочная "марковость" на краю).


Для q-распределений такие полные перевороты можно симулировать на компьютере (см. следующую страницу). Это можно использовать для выборки из распределений, если гнать такие цепи достаточно долго (вопрос еще требует изучения).

СИМУЛЯЦИИ ПЕРЕВОРОТА

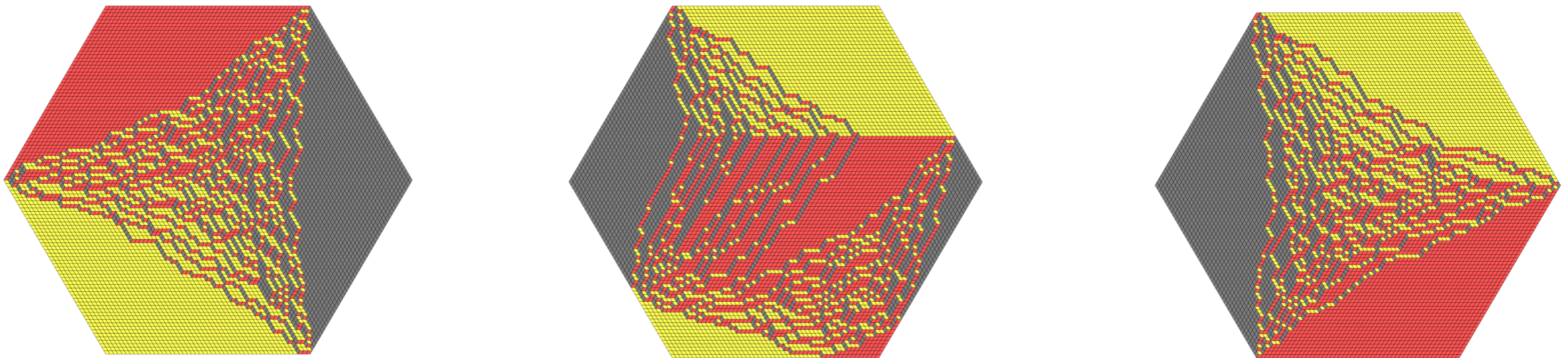
<https://lpetrov.cc/simulations/2019-04-30-qvol/>

Пока основное приложение для конечных замощений – марковская цепь для перевода случайного разбиения q^{-vol} в q^{+vol} , при котором все вертикальные ромбики едут налево, а левая граница меняется независимо от всей остальной конфигурации.

Ссылка на видеофайлы – выше 

Начало, середина, и конец одного такого мультика изображены ниже 

Начало мультика q^{-vol} - точный семпл по алгоритму Бородина-Горина-Райнса ([статья 1](#), [статья 2](#), [ссылка на программу тут внизу страницы](#))



ДАЛЬНЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

- Оказывается, с помощью переворотов с левыми прыжками, и пользуясь “дополнительной марковостью”, можно “отправить в прошлое” одну замечательную случайную систему частиц под названием TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process). TASEP моделирует неравновесную термодинамическую ситуацию: заполнили полкомнаты газом, а во второй половине вакуум - и открыли перегородку. Отправка в прошлое достигается путем рассмотрения бесконечных замощений и переходом к пределу $q \rightarrow 1$. Это наводит некоторую новую (пока не до конца понятную) “обратимость” на необратимую термодинамическую модель. Это результат весны 2019 года (LP & Axel Saenz, <https://arxiv.org/abs/1907.09155>)
- Что можно еще так переверачивать, кроме усеченного геометрического распределения? Есть много деформаций, связанных с q - и эллиптической комбинаторикой и алгеброй...

