

Глава 2

Симметрические многочлены Шура и доказательство формул МакМагона

- Детерминанты - определение. Строчные и столбцовые операции
- Детерминант Вандермонда
- Многочлены Шура
- Правило ветвления многочленов Шура
- Правило ветвления и замощения ромбиками
- Косые многочлены Шура от одной переменной
- Подсчет числа замощений ромбиками
- Доказательство формул МакМагона

ЗАЧЕМ НАМ ДЕТЕРМИНАНТЫ И СИММЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Один из самых мощных методов исследования замощений - симметрические многочлены Шура. Они позволяют как подсчитать число замощений большого класса многоугольников, так и описать форму (и более тонкие асимптотики) больших случайных замощений.

Многочлены Шура определяются с помощью детерминантов, и нам придется ненадолго в них погрузиться. Это необходимо, чтобы дать формально полное доказательство формул МакМагона. В дальнейшем мы не будем использовать много детерминантов, а сосредоточимся на приложениях обычных и косых функций Шура.

Мы начнем с напоминания про детерминанты, затем обсудим классическое утверждение про детерминант Вандермонда, в качестве разогрева.

$$\begin{aligned}
 & \lambda^{j+N-1} \\
 & x_N = \frac{1}{V_{N-1} (x_1-1) \dots (x_{N-1}-1)} \\
 & \det \begin{bmatrix} x_1^{l_1} & \dots & x_{N-1}^{l_1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{l_N} & \dots & x_{N-1}^{l_N} & 1 \end{bmatrix} \\
 & \text{Factor 2 from 1, 3 from 2, etc (} \\
 & \frac{1}{V_{N-1} (x_1-1) \dots (x_{N-1}-1)} \det \begin{bmatrix} x_1^{l_1} - x_1^{l_2} & & & \\ x_1^{l_2} - x_1^{l_3} & & & \\ \vdots & & & \\ x_1^{l_{N-1}} - x_1^{l_N} & & & \end{bmatrix} \\
 & \frac{x_1^{l_2} (x_1^{l_1-l_2} - 1)}{x_1 - 1} \\
 & \dots \dots \dots \{ 1 + x_1 + \dots + x_1^{l_2-1} \}
 \end{aligned}$$

НАПОМИНАНИЕ ©

ДЕТЕРМИНАНТАХ

Детерминант (определитель) квадратной матрицы $n \times n$

- это знакопеременная сумма $n!$ произведений

элементов, по одному из строки и из столбца:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{\sigma \in S(n)} \operatorname{sgn} \sigma a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Это формальное определение может быть не очень интуитивно понятным, давайте посмотрим на примеры:

- $n = 1$, $\det [a] = a$;
- $n = 2$, $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$;
- $n = 3$, детерминант содержит 6 слагаемых

Отметим ключевые свойства детерминантов, которые нам понадобятся:

- Если две строки или два столбца одинаковы, то детерминант равен нулю. Более общо, если строки

или столбцы линейно зависимы, то детерминант равен нулю.

- Если переставить местами две строки или два столбца, то детерминант поменяет знак.
- Если в строке или столбце матрицы все нули, кроме одного элемента, то порядок детерминанта можно

уменьшить: $\det \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} = A \cdot \det \begin{bmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{bmatrix}$

- Самое важное, строчные/столбцовые операции. Если в детерминанте взять строку и прибавить к ней другую строку, умноженную на любое число, то детерминант не поменяется. То же самое, если оперировать со столбцами.

ВАНДЕРМОНД

Многие детерминанты считаются явно и носят имена собственные. Один из них - детерминант Вандермонда

$$V_N(x_1, \dots, x_N) = \det[x_i^{N-j}]_{i,j=1}^N = \det \begin{bmatrix} x_1^{N-1} & \dots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{N-1} & \dots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \dots & & & & \\ x_N^{N-1} & \dots & x_N^2 & x_N & 1 \end{bmatrix}.$$

Теорема. Детерминант Вандермонда равен

$$V_N(x_1, \dots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j).$$

Доказательство. Проводится по индукции. База для $N = 1$, $N = 2$ очевидна. Возьмем детерминант порядка N и сделаем две вещи:

- Сначала вычтем первую строчку из каждой, от этого детерминант не изменится. При этом в первой строчке получатся все элементы кроме одного - нули, поэтому порядок детерминанта уменьшится на 1.
- Затем вычтем из каждого столбца $j, j = 1, \dots, N - 2$, этой новой матрицы порядка $N - 1$, столбец $j + 1$, помноженный на x_1 .
- После этого множители $x_i - x_1$ выносятся.

При таких преобразованиях с матрицей происходит вот что (пусть $N = 4$ для простоты):

$$\det \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 - x_1^3 & x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 & 0 \\ x_3^3 - x_1^3 & x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 & 0 \\ x_4^3 - x_1^3 & x_4^2 - x_1^2 & x_4 - x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} x_2^3 - x_1^3 & x_2^2 - x_1^2 & x_2 - x_1 \\ x_3^3 - x_1^3 & x_3^2 - x_1^2 & x_3 - x_1 \\ x_4^3 - x_1^3 & x_4^2 - x_1^2 & x_4 - x_1 \end{bmatrix}$$
$$= \det \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)x_2^2 & (x_2 - x_1)x_2 & x_2 - x_1 \\ (x_3 - x_1)x_3^2 & (x_3 - x_1)x_3 & x_3 - x_1 \\ (x_4 - x_1)x_4^2 & (x_4 - x_1)x_4 & x_4 - x_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь уже можно вынести все множители, получить V_{N-1} , и действовать по индукции. ■



1. Докажите, что эти действия - последовательность столбцовых операций (и не меняют дет.)

МНОГОЧЛЕНЫ ШУРА

Дадим определение многочлена Шура. Эти многочлены зависят от нескольких переменных x_1, \dots, x_N и индексируются последовательностями различных неотрицательных чисел $\vec{\ell} = \ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_N$:

$$s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det[x_i^{\ell_j}]_{i,j=1}^N}{V_N(x_1, \dots, x_N)}$$

Задача - получить комбинаторную формулу для $s_{\vec{\ell}}$.

Маленькие примеры:

- $N = 1, \vec{\ell} = (n), s_{\vec{\ell}}(x_1) = x_1^n$
- $N = 2, \vec{\ell} = (m > n), s_{\vec{\ell}}(x_1, x_2) = \frac{x_1^m x_2^n - x_2^m x_1^n}{x_1 - x_2}$
 $= (x_1 x_2)^n \frac{x_1^{m-n} - x_2^{m-n}}{x_1 - x_2} = (x_1 x_2)^n (x_1^{m-n-1} + x_1^{m-n-2} x_2 + \dots + x_1 x_2^{m-n-2} + x_2^{m-n-1})$
 $= x_1^{m-1} x_2^n + x_1^{m-2} x_2^{n+1} + \dots + x_1^n x_2^{m-1}.$

Здесь мы поделили с помощью формулы разности степеней.



2. Докажите, что многочлен Шура $s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N)$ - действительно многочлен от x_1, \dots, x_N .

Оказывается, отношение детерминантов всегда будет однородным многочленом от x_1, \dots, x_N . Он и называется многочленом Шура.



3. Какова (суммарная) степень многочлена Шура? Ответ $\sum \ell_i - C_N^2$




4. Докажите, что многочлен Шура симметричен по x_1, \dots, x_N

Утверждение (без доказательства).

Многочлены Шура $s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N)$ (когда $\vec{\ell}$ пробегает все возможные последовательности $\ell_1 > \dots > \ell_N$) образуют базис в пространстве всех симметрических многочленов от N переменных.

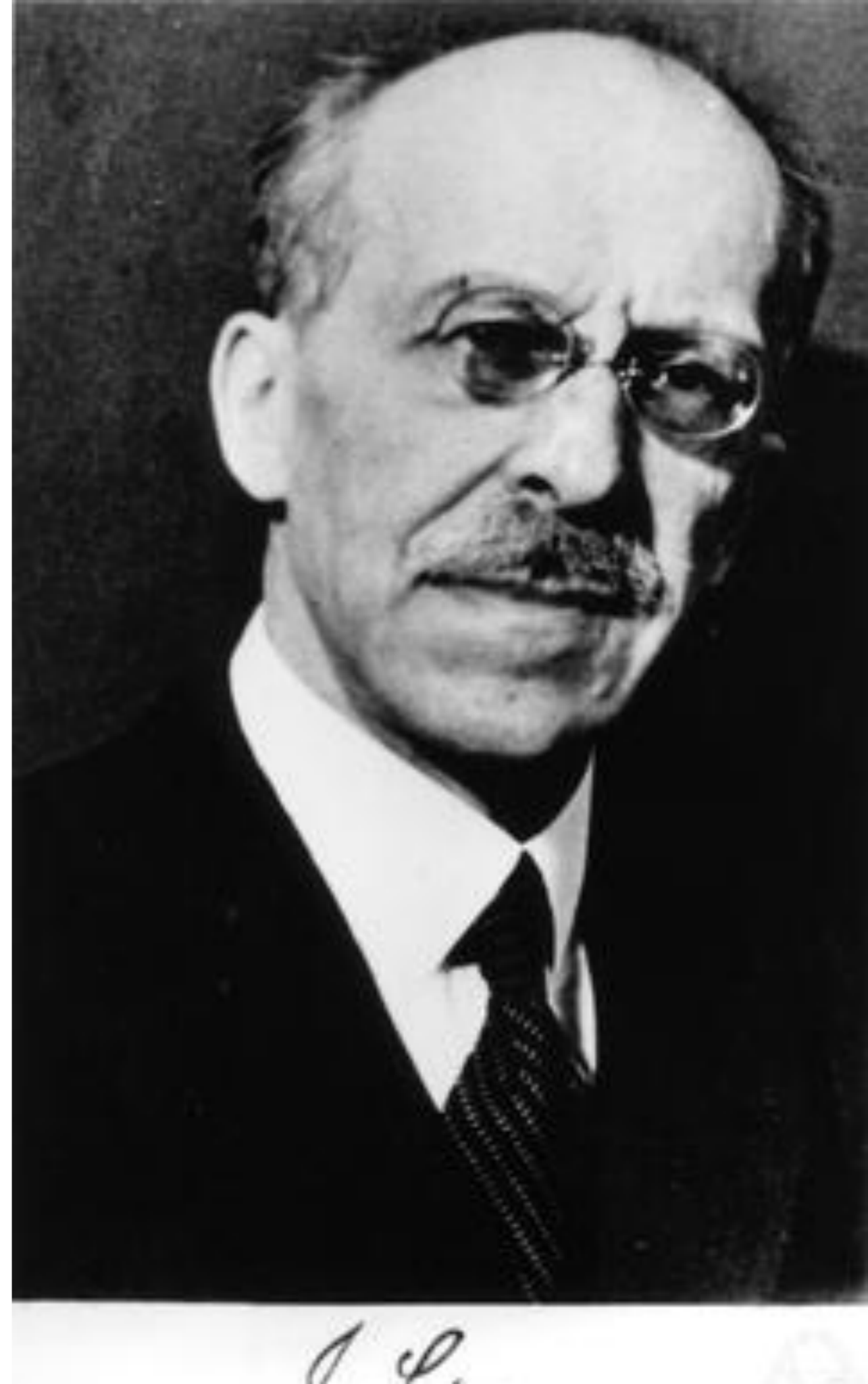
ПРО ОБОЗНАЧЕНИЯ

Многочлены Шура названы в честь Исаи Шура (Schur), математика очень сложной судьбы ([Википедия](#)) 
(При этом сами многочлены были известны уже в начале XIX века.)

Для приложения к замощениям нам удобно нетрадиционное обозначение для меток $\vec{\ell}$ многочленов Шура $s_{\vec{\ell}}$. А именно, если определить $\lambda_i = \ell_i + i - N$, $i = 1, \dots, N$, то эти метки нестрого упорядочены: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$. Мы получаем разбиение λ .

Всюду в литературе многочлены Шура обозначаются $s_{\lambda}(x_1, \dots, x_N)$. Степень s_{λ} равна $|\lambda|$.

В теории представлений многочлены Шура выступают, например, как характеры представлений унитарных групп, при этом $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N)$ - старший вес представления.



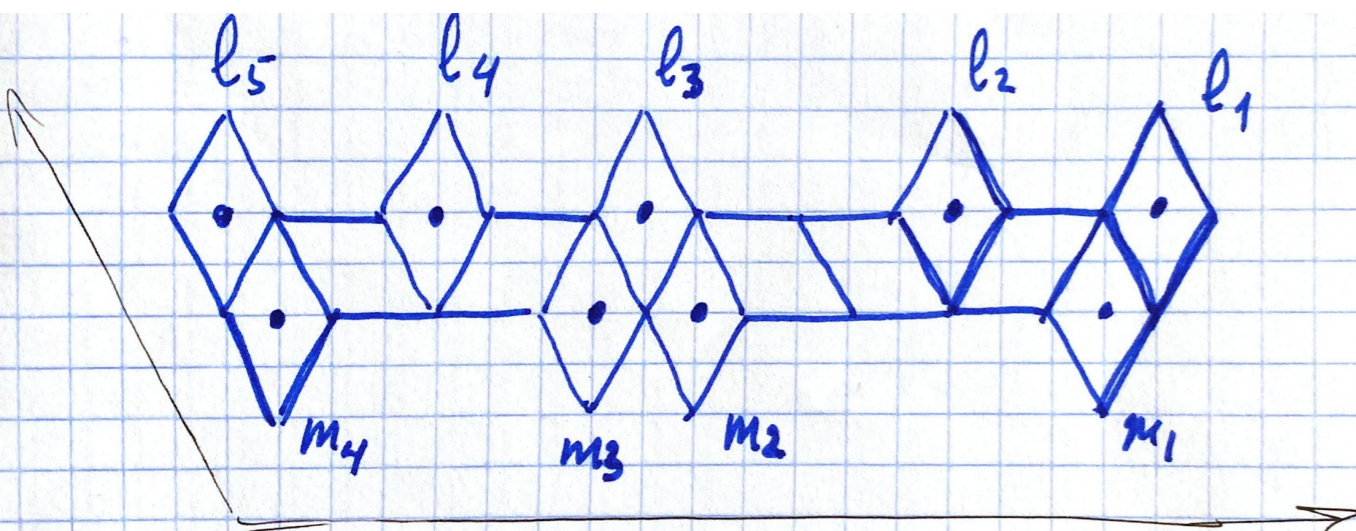
ОТНОШЕНИЕ ПЕРЕМЕЖАНИЯ

Определение. Пусть $\vec{\ell} = (\ell_1 > \dots > \ell_N)$ и $\vec{m} = (m_1 > \dots > m_{N-1})$ - две последовательности. Они называются *перемежающимися* (англ. *interlacing*), если

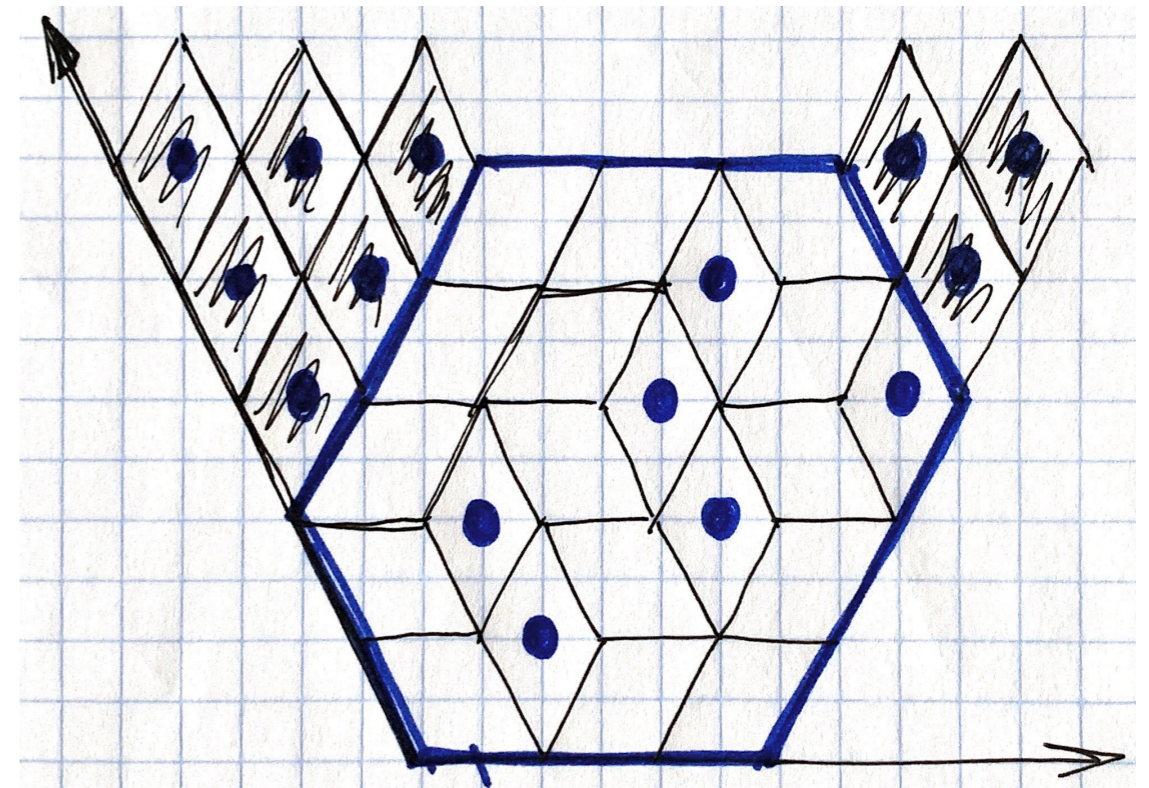
$$\vec{m} \prec \vec{\ell} \iff \ell_N \leq m_{N-1} < \ell_{N-1} \leq m_{N-2} < \dots < \ell_2 \leq m_1 < \ell_1$$

Это определение немного несимметрично относительно $\vec{\ell}$ и \vec{m} . Но это оказывается удобным, т.к. соответствует перемежанию двух соседних слоев в замощении ромбиками!

Здесь ℓ_i, m_i - горизонтальные координаты центров ромбиков в косой системе координат. Легко видеть, что это приводит к неравенствам $m_i < \ell_i \leq m_{i-1}$.



Координатизация замощений. Каждое замощение шестиугольника путем добавления вертикальных (закрашенных) ромбиков можно отождествить с перемежающимся массивом целых чисел (каждые два слоя в этом массиве связаны отношением \prec):



	0	1	2	6	7
	0	1	4	6	
массив	0	3	5		
		1	3		
			1		

ВЕТВЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ ШУРА

Теорема (правило ветвления многочленов Шура).

$$s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N) \Big|_{x_N=1} = \sum_{\vec{m}: \vec{m} \prec \vec{\ell}} s_{\vec{m}}(x_1, \dots, x_{N-1})$$

Замечание. В теории представлений это соответствует ограничению неприводимого представления $U(N)$ на подгруппу $U(N-1) \subset U(N)$, и разложению этого ограничения на неприводимые представления подгруппы. (Задача осмыслена и интересна для любой цепочки вложенных групп/алгебр.)

Доказательство. По индукции, используя определение многочлена Шура с помощью детерминанта. Проведем доказательство для простоты при $N = 4$. Шаги такие: вычитаем из первой строки вторую, из второй третью, и т.д. Получится детерминант, у которого в последнем столбце есть единственная единица, так что можно уменьшить порядок. Далее, первый столбец будет делиться на $x_1 - 1$, второй на $x_2 - 1$, третий на $x_3 - 1$ - и таким образом Вандермонд тоже уменьшит порядок.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V_4(x_1, x_2, x_3, 1)} \det \begin{bmatrix} x_1^{\ell_1} & x_2^{\ell_1} & x_3^{\ell_1} & 1 \\ x_1^{\ell_2} & x_2^{\ell_2} & x_3^{\ell_2} & 1 \\ x_1^{\ell_3} & x_2^{\ell_3} & x_3^{\ell_3} & 1 \\ x_1^{\ell_4} & x_2^{\ell_4} & x_3^{\ell_4} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{V_3(x_1, x_2, x_3)(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)} \det \begin{bmatrix} x_1^{\ell_1} - x_1^{\ell_2} & x_2^{\ell_1} - x_2^{\ell_2} & x_3^{\ell_1} - x_3^{\ell_2} \\ x_1^{\ell_2} - x_1^{\ell_3} & x_2^{\ell_2} - x_2^{\ell_3} & x_3^{\ell_2} - x_3^{\ell_3} \\ x_1^{\ell_3} - x_1^{\ell_4} & x_2^{\ell_3} - x_2^{\ell_4} & x_3^{\ell_3} - x_3^{\ell_4} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{V_3(x_1, x_2, x_3)} \det \begin{bmatrix} \sum_{\ell_2 \leq m_1 < \ell_1} x_1^{m_1} & \sum_{\ell_2 \leq m_1 < \ell_1} x_2^{m_1} & \sum_{\ell_2 \leq m_1 < \ell_1} x_3^{m_1} \\ \sum_{\ell_3 \leq m_2 < \ell_2} x_1^{m_2} & \sum_{\ell_3 \leq m_2 < \ell_2} x_2^{m_2} & \sum_{\ell_3 \leq m_2 < \ell_2} x_3^{m_2} \\ \sum_{\ell_4 \leq m_3 < \ell_3} x_1^{m_3} & \sum_{\ell_4 \leq m_3 < \ell_3} x_2^{m_3} & \sum_{\ell_4 \leq m_3 < \ell_3} x_3^{m_3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Так как детерминант - мультилинейная функция, и суммы по m_1, m_2, m_3 в каждой строке одинаковые, то получается как раз сумма $s_{\vec{m}}$ по всем $\vec{m} \prec \vec{\ell}$. ■

Следствие.

$$s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\vec{m}: \vec{m} \prec \vec{\ell}} s_{\vec{m}}(x_1, \dots, x_{N-1}) x_N^{\sum \ell_i - \sum m_j - (N-1)}.$$

(Потому что мн. Шура однородны, и мы знаем степени.)

МНОГОЧЛЕНЫ ШУРА И ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЗАМОЩЕНИЙ

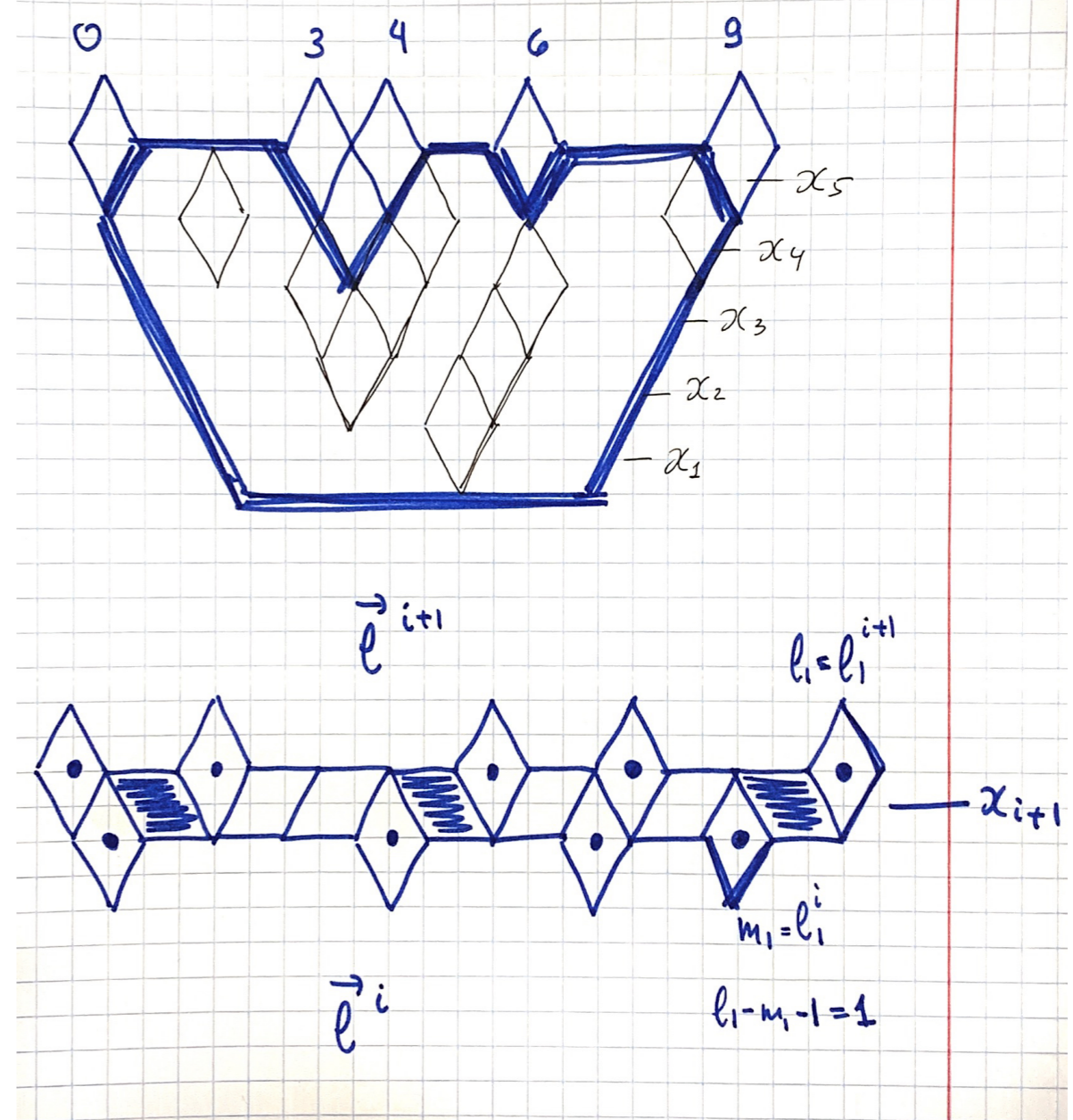
Обозначим $|\vec{\ell}| = \sum \ell_i$.

Применяя следствие для $N-1, N-2, \dots, 2$, получаем, что

$$s_{\vec{\ell}}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\vec{\ell}^1 \prec \vec{\ell}^2 \prec \dots \prec \vec{\ell}^N = \vec{\ell}} x_1^{|\vec{\ell}^1|} x_2^{|\vec{\ell}^2| - |\vec{\ell}^1| - 1} \dots x_N^{|\vec{\ell}^N| - |\vec{\ell}^{N-1}| - (N-1)}$$

Сумма здесь ведется по всем перемежающимся массивам или, что то же самое, по всем замощениям π высоты N с верхней строчкой $\vec{\ell}$. Причем функция от π , которую мы суммируем, зависит от N параметров x_1, \dots, x_N и является произведением некоторых выражений \rightarrow по всем слоям.

А именно, $|\vec{\ell}^{i+1}| - |\vec{\ell}^i| - i$ - это число закрасенных горизонтальных ромбиков плюс крайнее значение



сверху, равное ℓ_{i+1}^{i+1} . Это **косой многочлен Шура** (от одной переменной): $s_{\vec{\ell}^{i+1} / \vec{\ell}^i}(x_{i+1}) = x_{i+1}^{|\vec{\ell}^{i+1}| - |\vec{\ell}^i| - i}$ (и по определению многочлен равен нулю, если перемежаемость не выполняется).

Число замощений с верхней строкой $\vec{\ell}$, таким образом, равно $s_{\vec{\ell}}(1, 1, \dots, 1)$. Но это сразу из детерминантной формулы не посчитаешь...

q-ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЗАМОЩЕНИЙ

Пусть пока верхняя строчка $\vec{\ell}$ на уровне N -произвольная. Подставим в многочлен Шура геометрическую прогрессию, $s_{\vec{\ell}}(1, q^{-1}, \dots, q^{1-N})$. Тогда в сумме по замещениям получим q в степени

$$-|\vec{\ell}^2| + |\vec{\ell}^1| + 1 - 2|\vec{\ell}^3| + 2|\vec{\ell}^2| + 4 - 3|\vec{\ell}^4| + 3|\vec{\ell}^3| + 9 + \dots$$

$$= \text{const}(\vec{\ell}, N) + \sum_{j=1}^N |\vec{\ell}^j|.$$



5. Докажите, что $\sum |\vec{\ell}^j|$ - это объем замощения с точностью до аддитивной константы

Таким образом, $s_{\vec{\ell}}(1, q^{-1}, \dots, q^{1-N}) = q^{\text{const}(\vec{\ell}, N)} \sum_{\pi} q^{\text{vol}(\pi)}$.

С помощью детерминантной формулы для многочлена Шура мы можем вычислить левую часть. А именно, из-за геометрической прогрессии мы увидим Вандермонд и в числителе тоже!

$$s_{\vec{\ell}}(1, q^{-1}, \dots, q^{1-N}) = \frac{\det[q^{(1-i)\ell_j}]_{i,j=1}^N}{\prod_{i<j} (q^{1-i} - q^{1-j})} = \frac{\det[(q^{-\ell_j})^{i-1}]_{i,j=1}^N}{\prod_{i<j} (q^{1-i} - q^{1-j})}$$

$$= \prod_{i<j} \frac{q^{-\ell_i} - q^{-\ell_j}}{q^{1-j} - q^{1-i}} = \prod_{i<j} \frac{q^{N-\ell_i} - q^{N-\ell_j}}{q^{N+1-j} - q^{N+1-i}} = \prod_{i<j} \frac{q^{N-\ell_i} - q^{N-\ell_j}}{q^i - q^j}$$

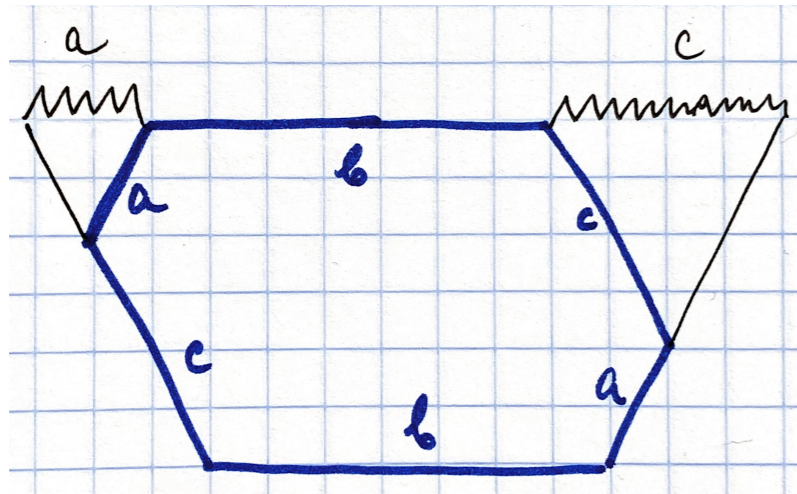
(здесь числитель и знаменатель положительны).

В этой формуле мы уже можем устремить q к единице ($q^{\text{const}(\vec{\ell}, N)}$ роли не играет), и получим

$$s_{\vec{\ell}}(1, 1, \dots, 1) = \prod_{i<j} \frac{\ell_i - \ell_j}{j - i}.$$

Это на самом деле **формула размерности Вейля**, которая (в данном частном случае типа A, унитарных групп) дает размерность неприводимого представления.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ МАКМАГОНА

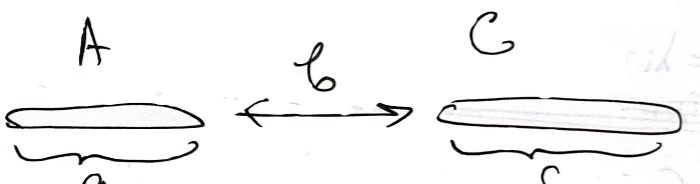


Теперь мы можем применить все к шестиугольнику.

Если он вот такой , то надо взять $N = a + c$, и

$$\vec{\ell} = (a + b + c - 1, a + b + c - 2, \dots, a + b, a - 1, \dots, 1, 0).$$

Получим формулу МакМагона из формулы размерности, q -случай оставим в качестве упражнения.



$$\prod_{i < j} = \left(\prod_{\substack{i < j \\ i, j \in A}} \right) \left(\prod_{\substack{i < j \\ i, j \in C}} \right) \left(\prod_{\substack{i \in A \\ j \in C}} \right)$$

Для шестиугольника произведение $\prod_{1 \leq i < j \leq a+c} \frac{\ell_i - \ell_j}{j - i}$ разбивается в три. В первой и третьей части оба индекса i, j принадлежат одной и той же плотной упаковке; во второй - разным. Оказывается, что первая и третья часть сокращаются. Получается, что произведение дает

$$\prod_{1 \leq i < j \leq a+c} \frac{\ell_i - \ell_j}{j - i} = \prod_{i=1}^c \prod_{j=1}^a \frac{a + b + c - i - (a - j)}{(c + j) - i} \quad \blacksquare$$



8. Убедитесь, что это выражение совпадает с формулой МакМагона для числа замощений $\Omega_{a,b,c}$



9. Выведите q -формулу МакМагона из формулы для $s_{\vec{\ell}}(1, q^{-1}, \dots, q^{1-N})$